

ОТДЕЛ II.  
СЛОЖНЫЕ СЛУЧАИ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ.

ГЛАВА IV.

РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ  
ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ.

§ 19. Статически неопределимые системы.

Умение вычислять деформации стержней при растяжении и сжатии даёт нам возможность установить, насколько изменяются формы и размеры частей конструкций при действии внешних сил. Обычно эти изменения формы настолько незначительны, что кажутся лишёнными практического значения.

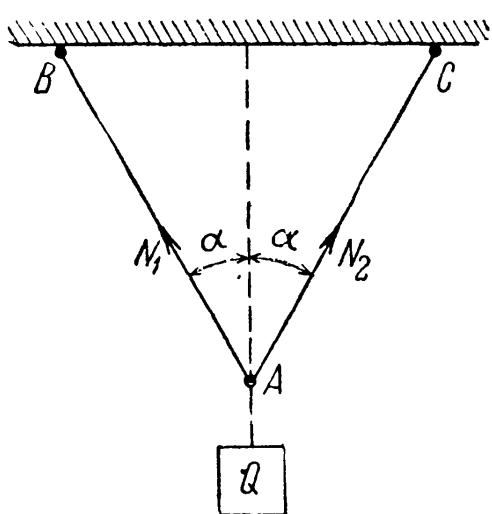
Однако есть целый класс конструкций, для которых проверка прочности и определение сечений отдельных элементов невозможны

без умения определять деформации; это так называемые *статически неопределимые* конструкции (системы); нахождение усилий в их элементах представляет собой *статически неопределенную задачу*.

Во всех примерах, которые мы рассматривали до сих пор, усилия, растягивающие или сжимающие стержни, определялись из условий статики твёрдого тела.

Так, в случае подвески груза  $Q$  на двух стержнях (фиг. 38)  $AB$  и  $AC$  мы находим усилия  $N_1$  и  $N_2$ , растягивающие эти стержни, из условия равновесия точки  $A$ . Три силы, приложенные в точке  $A$ , должны удовлетворять двум уравнениям равновесия, а именно: сумма проекций этих сил на каждую из двух координатных осей должна равняться нулю. Таким образом, число неизвестных (два) равно числу уравнений (два), и усилия  $N_1$  и  $N_2$  из этих уравнений могут быть найдены. Эта задача — статически определимая.

Иначе будет обстоять дело, если груз  $Q$  будет подвешен на трёх стержнях (фиг. 39). В этом случае точка  $A$  находится в равн-



Фиг. 38.

весии под действием четырёх сил:  $Q$ ,  $N_3$ ,  $N_1$  и  $N_2$ , причём три последние являются неизвестными. Уравнений же равновесия можно написать по-прежнему лишь два. Таким образом, число неизвестных на единицу больше числа уравнений — конструкция однажды статически неопределенна, и задача не может быть решена только с помощью уравнений статики.

Необходимое для решения задачи дополнительное уравнение можно составить, пользуясь теми представлениями о свойствах материалов, которые мы получили, переходя от теоретической механики к сопротивлению материалов. Речь идёт об учёте деформируемости материала. Дополнительное уравнение мы сможем найти, изучая те деформации, которые испытывает конструкция. Оказывается, что всегда можно найти столько дополнительных уравнений, сколько нам нужно, чтобы полное число уравнений вместе с условиями статики равнялось числу неизвестных.

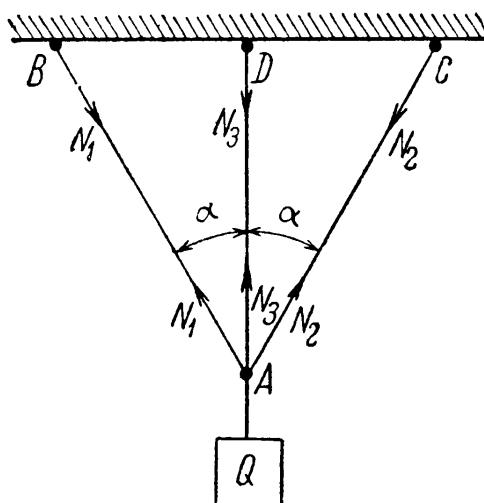
Эти дополнительные уравнения составляются на основании одного общего принципа, они должны выразить условия совместности деформаций системы.

Всякая конструкция деформируется так, что не происходит разрывов стержней, разъединения их друг от друга, или не предусмотренных схемой сооружения перемещений одной части конструкции относительно другой. В этом и заключается *совместность деформаций* элементов системы.

Общий метод расчёта статически неопределенных систем таков. Сначала следует выяснить, какие усилия необходимо определить; затем написать все уравнения статики твёрдого тела; после этого — составить дополнительные уравнения в таком числе, чтобы можно было найти все неизвестные усилия.

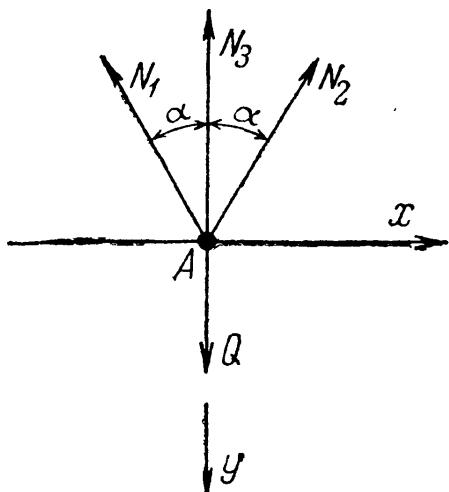
Ход решения выясним на взятом частном примере (фиг. 39). Пусть крайние стержни, имеющие равные площади поперечных сечений, — стальные, средний же стержень — медный. Длина среднего стержня  $l_3$ , крайних  $l_1$ ; допускаемые напряжения для стали пусть будут  $[\sigma_c]$ , а для меди  $[\sigma_m]$ . Требуется установить прочные размеры поперечных сечений этих стержней под действием подвешенного к ним груза  $Q$ .

Прежде всего установим силы, действующие на каждый из трёх стержней. Так как в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  имеются шарниры, все три стержня могут подвергаться только осевым усилиям. Считаем эти усилия растягивающими; для их определения мы должны рассмотреть равновесие точки  $A$ , к которой приложена единственная



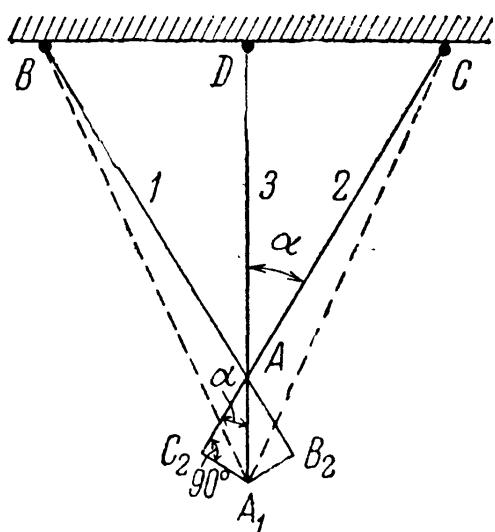
Фиг. 39.

известная сила  $Q$ . Схема действия сил на точку и расположение координатных осей даны на фиг. 40. Приравниваем нулю суммы проекций на координатные оси сил, действующих на точку  $A$ :



Фиг. 40.

действием силы  $Q$  все три стержня удлиняются, и точка  $A$  опустится. Так как усилия  $N_1$  и  $N_2$  равны между собой и стержни 1 и 2 из одного материала, то при равных длинах стержней их удлинения  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  будут одинаковы, точка  $A$  опустится по вертикали вниз. Удлинение третьего стержня назовём  $\Delta l_3$ .



Фиг. 41.

совпадут в точке  $A_1$ , двигаясь по дугам  $C_2A_1$  и  $B_2A_1$ , которые вследствие малости деформаций можно принять за прямые отрезки, *перпендикулярные* к  $CC_2$  и  $BB_2$ .

Новое положение крайних стержней  $BA_1$  и  $CA_1$  показано пунктиром. Так как конец среднего стержня тоже прикреплён к шарниру, то и он перейдёт в точку  $A_1$ , и удлинение  $\Delta l_3$  будет равно отрезку  $AA_1$ .

Удлинения всех трёх стержней  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$  и  $\Delta l_3$  по закону Гука будут пропорциональны усилиям, растягивающим эти стержни.

$$N_2 \sin \alpha - N_1 \sin \alpha = 0,$$

$$Q - N_3 - N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha = 0.$$

Из первого уравнения получаем  $N_1 = N_2$ ; подставляя вместо  $N_2$  во второе уравнение величину  $N_1$ , получаем:

$$N_3 + 2N_1 \cos \alpha = Q. \quad (4.1)$$

Теперь у нас осталось *одно* уравнение с *двумя* неизвестными.

Для получения дополнительного уравнения мы должны обратиться к изучению деформаций нашей конструкции. Под

изменениями длин всех трёх стержней будут совместны, т. е. и после деформации стержни остаются соединёнными в точке  $A$ . Для нахождения нового положения этой точки разъединим в ней стержни и изобразим на чертеже (фиг. 41) новые длины крайних стержней  $CC_2$  и  $BB_2$ , увеличив их старую длину на величины  $\Delta l_1 = AB_2$  и  $\Delta l_2 = AC_2$ . Для того чтобы

найти новое положение точки  $A$ , необходимо свести вместе удлинённые стержни  $CC_2$  и  $BB_2$ , вращая их вокруг точек  $B$  и  $C$ . Точки  $B_2$  и  $C_2$  совпадут в точке  $A_1$ , двигаясь по дугам  $C_2A_1$  и  $B_2A_1$ , которые вследствие малости деформаций можно принять за прямые отрезки, *перпендикулярные* к  $CC_2$  и  $BB_2$ .

Новое положение крайних стержней  $BA_1$  и  $CA_1$  показано пунктиром.

Так как конец среднего стержня тоже прикреплён к шарниру, то и он перейдёт в точку  $A_1$ , и удлинение  $\Delta l_3$  будет равно отрезку  $AA_1$ .

Удлинения всех трёх стержней  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$  и  $\Delta l_3$  по закону Гука будут пропорциональны усилиям, растягивающим эти стержни.

Найдя из чертежа зависимость между этими удлинениями, мы получим добавочное уравнение, связывающее между собой неизвестные усилия в стержнях. Из треугольника  $A_1AB_3$  имеем:

$$AB_3 = AA_1 \cos \alpha \quad \text{или} \quad \Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha. \quad (4.2)$$

Выразим  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_3$  через усилия  $N_1$  и  $N_3$ . Для этого необходимо знать площади этих стержней. Здесь мы подходим к важной особенности статически неопределеных систем: *для нахождения усилий в стержнях необходимо предварительно задаваться разметками их поперечных сечений или их отношениями.*

Пусть площади сечений стержней будут  $F_1$  и  $F_3$ ; модуль упругости стали обозначим  $E_c$  и модуль упругости меди  $E_m$ . Тогда

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_c F_1}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_m F_3}. \quad (4.3)$$

Подставляя эти значения  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_3$  в уравнение (4.2), получаем:

$$\frac{N_1 l_1}{E_c F_1} = \frac{N_3 l_3}{E_m F_3} \cos \alpha.$$

Так как из треугольника  $ABD$  (фиг. 41) следует, что

$$l_3 = l_1 \cos \alpha,$$

то

$$N_1 = N_3 \frac{E_c F_1}{E_m F_3} \cos^2 \alpha. \quad (4.4)$$

Таким образом, путём рассмотрения совместности деформаций системы получено дополнительное уравнение, связывающее  $N_1$  и  $N_3$ .

Условие совместности деформаций имело место и в статически определимых конструкциях, но там оно не налагало никаких ограничений на распределение усилий; для таких конструкций возможна только одна система усилий, удовлетворяющая условиям равновесия; так как там число неизвестных равно числу уравнений статики, соответствующая система деформаций удовлетворяет и условиям совместности. Например, для конструкции, изображённой на фиг. 38, усилия в стержнях вполне определяются при малых деформациях из условий равновесия точки  $A$ ; оба стержня могут получить вызываемые этими усилиями удлинения без нарушения связи их друг с другом, — условие совместности деформаций будет выполнено автоматически.

Наоборот, в статически неопределеных конструкциях может быть сколько угодно систем усилий, для которых выполнены уравнения равновесия, так как число неизвестных *больше* числа этих уравнений; условие совместности деформаций отбирает из всех этих возможных комбинаций усилий ту комбинацию, которая будет иметь место в действительности.

В статически неопределенной системе (фиг. 39) положение точки  $A$  после деформации связывает между собой удлинения всех трёх стержней; чтобы была соблюдена совместность деформаций, необходимо, чтобы эти удлинения находились между собой в определённом отношении; это условие и даёт добавочное уравнение (4.4) для определения неизвестного усилия.

Продолжая решение нашей задачи, подставляем из (4.4) значение  $N_1$  в уравнение (4.1) и получаем:

$$N_3 + 2N_3 \frac{E_c F_1}{E_m F_3} \cos^3 \alpha = Q.$$

Отсюда

$$N_3 = \frac{Q}{1 + 2 \frac{E_c F_1}{E_m F_3} \cos^3 \alpha} \quad (4.5)$$

и из (4.4)

$$N_1 = \frac{Q \frac{E_c F_1}{E_m F_3} \cos^2 \alpha}{1 + 2 \frac{E_c F_1}{E_m F_3} \cos^3 \alpha} = N_2. \quad (4.6)$$

Из полученных формул видно, что величина усилий  $N$  зависит не от абсолютных величин площадей  $F$  и модулей  $E$ , а от их *отношений*. Задаваясь различными соотношениями  $n = \frac{F_1}{F_3}$ , мы будем получать различные комбинации усилий  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ .

По величинам этих усилий и допускаемым напряжениям можно теперь найти и сами величины  $F_1$  и  $F_3$  из условий, что

$$\frac{N_1}{F_1} \leq [\sigma_c], \quad \frac{N_3}{F_3} \leq [\sigma_m]. \quad (4.7)$$

Определив из первого условия  $F_1$  и зная выбранную нами величину  $n = \frac{F_1}{F_3}$ , находим  $F_3 = \frac{F_1}{n}$ . Затем проверяем, удовлетворяет ли она второму из условий (4.7); если нет, то из этого условия находим  $F_3$ , а  $F_1$  определяем формулой

$$F_1 = nF_3. \quad (4.8)$$

Таким образом, в *статически неопределенной системе при данной нагрузке* мы можем осуществить *много вариантов распределения усилий* между стержнями, меняя соотношение площадей поперечных сечений стержней. Для дальнейшего разъяснения возьмём числовой пример.

Пусть  $Q = 4$  т;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $[\sigma_c] = 1000$  кг/см<sup>2</sup>;  $E_c = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>;  $[\sigma_m] = 600$  кг/см<sup>2</sup>;  $E_m = 1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.

Для предварительного подсчёта выбираем

$$n = \frac{F_1}{F_3} = 1.$$

Тогда

$$N_1 = N_2 = \frac{4 \frac{2 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^6} \cos^2 30^\circ}{1 + 2 \frac{2 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^6} \cos^3 30^\circ} = 1,67 \text{ т},$$

$$N_3 = \frac{4}{1 + 2 \frac{2 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^6} \cos^3 30^\circ} = 1,11 \text{ т.}$$

Из условий прочности получаем:

$$F_1 = \frac{N_1}{[\sigma_c]} = \frac{1670}{1000} = 1,67 \text{ см}^2.$$

Так как мы приняли, что  $F_1 = F_3$ , то  $F_3 = 1,67 \text{ см}^2$ .

Проверим, будет ли при таких условиях удовлетворено условие прочности для среднего стержня:

$$\frac{N_3}{F_3} = \frac{1110}{1,67} = 667 \text{ кг/см}^2 > 600 \text{ кг/см}^2.$$

Принятая площадь  $F_3$  мала; необходимо взять

$$F_3 = \frac{N_3}{[\sigma_m]} = \frac{1110}{600} = 1,85 \text{ см}^2.$$

Для того чтобы было соблюдено положенное в основу нашего расчёта условие  $F_1 = F_3$ , мы должны принять  $F_1 = F_3 = 1,85 \text{ см}^2$  вместо необходимой из первого условия величины  $1,67 \text{ см}^2$ . Таким образом, в крайних стержнях мы имеем дополнительный запас.

Если бы мы захотели избежать этого излишнего запаса и приняли бы

$$F_1 = F_2 = 1,67 \text{ см}^2; F_3 = 1,85 \text{ см}^2, \quad (4.9)$$

то сейчас же изменились бы усилия  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ ; отношение  $\frac{F_1}{F_3}$  было бы равно уже не 1, как было раньше принято, а 0,9. В формуле (4.5) знаменатель уменьшится и  $N_3$  увеличится; в формуле же (4.6) знаменатель уменьшится в меньшей степени, чем числитель, поэтому  $N_1$  и  $N_2$  уменьшатся.

Уменьшая площади крайних стержней по отношению к площади среднего, мы уменьшаем усилия в этих крайних элементах и увеличиваем усилие в среднем стержне.

Здесь отражается общий закон, характеризующий распределение усилий между стержнями в статически неопределеных системах, — эти усилия распределяются соответственно жёсткости стержней; *чем больше площадь данного стержня, тем большую долю усилия он на себя берёт, и наоборот.*

Если мы будем площади  $F_1$  и  $F_2$  приближать к нулю, то и усилия  $N_1$  и  $N_2$  будут приближаться к нулю, а  $N_3$  к  $Q$ . Если же будем уменьшать площадь  $F_3$ , то  $N_3$  будет уменьшаться, а  $N_1$  и  $N_2$  — увеличиваться.

При отношении  $n = 0,9$  [формула (4.8)]  $N_1 = N_2 = 1,60$  т,  $N_3 = 1,20$  т. Это потребует  $F_3 = 2,0 \text{ см}^2$  и  $F_1 = 1,8 \text{ см}^2$  вместо требуемой по условию прочности для стальных стержней  $1,6 \text{ см}^2$ .

Если бы мы приняли для крайних стержней  $F_1 = 1,6 \text{ см}^2$ , то отношение  $n$  вновь уменьшилось бы, и средний стержень оказался бы опять перенапряжённым. Поэтому приходится опять мириться с запасом в крайних стержнях. Из формулы (4.4) вытекает, что подобрать соотношение площадей  $n = \frac{F_1}{F_3}$  так, чтобы напряжение во всех стержнях было равно допускаемому, можно лишь при *определенном значении угла  $\alpha$* . В самом деле, если бы нам удалось назначить площади  $F$  точно по допускаемым напряжениям, то мы имели бы соотношения

$$N_1 = F_1 [\sigma_c]; \quad N_3 = F_3 [\sigma_m]. \quad (4.10)$$

Подставляя эти величины в равенство (4.4), получаем:

$$F_1 [\sigma_c] = F_3 [\sigma_m] \frac{E_c F_1}{E_m F_3} \cos^2 \alpha. \quad (4.11)$$

Отсюда имеем:

$$\cos^2 \alpha = \frac{[\sigma_c]}{[\sigma_m]} \cdot \frac{E_m}{E_c}, \quad (4.12)$$

т. е. для возможности подбора сечений стержней без излишнего запаса при всяком  $n$  необходимо, чтобы  $\cos \alpha$  удовлетворял условию (4.12).

При наших данных получаем:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1000 \cdot 1 \cdot 10^6}{600 \cdot 2 \cdot 10^6} \quad \text{и} \quad \alpha = 24^\circ.$$

Так как в нашей конструкции  $\alpha = 30^\circ$ , то при *всяком*  $n$  мы вынуждены будем или давать запас в одной группе стержней или и гти на перенапряжение для другой группы. Самую же величину  $n$  надо выбирать так, чтобы получить наиболее экономичное решение. В таблице 8 даны результаты подсчёта для различных  $n$ . Зная площади, длины и материал стержней, можно выбрать комбинацию, дающую наиболее экономичное решение в зависимости от стоимости материала.

Таблица 8. Результаты расчётов при различных значениях  $n$ .

$n = \frac{F_1}{F_3}$	$N_1 = N_2$ $\frac{N_1}{T}$	$N_3$ $\frac{N_3}{T}$	$F_1 = F_2 \text{ см}^2$		$F_3 \text{ см}^2$
			необходимая	принятая	
0,8	1,56	1,30	1,56	1,74	2,17
0,9	1,60	1,20	1,60	1,80	2,00
1,0	1,67	1,11	1,67	1,85	1,85
1,2	1,75	0,97	1,75	1,94	1,62
1,5	1,83	0,82	1,83	2,06	1,37

## § 20. Влияние неточностей изготовления на усилия в элементах статически неопределенных конструкций.

В предыдущих параграфах мы установили особенности работы и расчёта статически неопределенных систем.

1. Недостающие для определения усилий уравнения могут быть получены *только* при помощи изучения совместности деформаций данной системы.

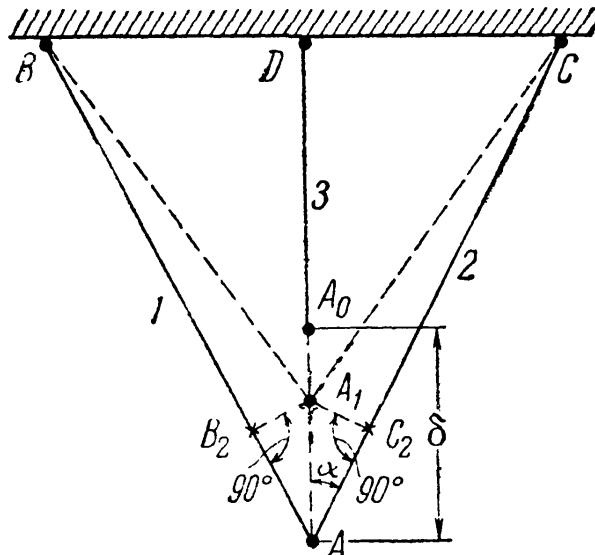
2. Распределение усилий между элементами статически неопределенной конструкции зависит от соотношения между площадями, модулями упругости и длинами этих элементов.

3. Чем более жёсток данный элемент, т. е. чем меньше его длина и больше площадь и модуль упругости, тем сравнительно большую долю усилия он принимает на себя.

В настоящем параграфе мы рассмотрим ещё одно важное для практики свойство статически неопределенных конструкций.

При изготовлении всякого рода сооружений нельзя обеспечить абсолютно точного выполнения размеров их частей; всегда надо считаться с возможностью тех или иных небольших неправильностей при их изготовлении. Если мы имеем дело со статически определимой системой, то такие неточности не вызовут никаких напряжений в этой системе. Так, например, если стержень  $AB$  (фиг. 38) будет сделан немного короче, чем предполагалось по чертежу, то это поведёт за собой лишь лёгкое искашение треугольника  $CAB$ . При отсутствии силы  $Q$  усилия в стержнях  $AB$  и  $AC$  будут равны нулю независимо от того, с какой точностью исполнены длины этих стержней.

Совсем иначе поведёт себя статически неопределенная конструкция, изображённая на фиг. 39. Пусть средний стержень будет сделан короче, чем следует на длину  $AA_0 = \delta$  (фиг. 42). Чтобы соединить



Фиг. 42.

конец среднего стержня  $A_0$  с концами  $A$  крайних стержней где-то в точке  $A_1$ , необходимо средний стержень растянуть на длину  $\Delta l_3 = A_0A_1$ , а крайние сжать на длину  $\Delta l_1 = AB_2 = AC_2$ . Проводя в точках  $C_2$  и  $B_2$  перпендикуляры к первоначальным положениям крайних стержней, как описано в § 19, получаем точку соединения концов всех трёх стержней  $A_1$ . Из чертежа получаем уравнение совместности деформаций стержней:

$$A_0A = A_0A_1 + A_1A,$$

или

$$\delta = \Delta l_3 + \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha}. \quad (4.13)$$

Так как внешних нагрузок нет и усилие  $N_1$  — сжимающее, а  $N_3$  — растягивающее, то уравнение равновесия (4.1) принимает вид

$$N_3 - 2N_1 \cos \alpha = 0. \quad (4.14)$$

Заменяя в уравнении (4.13) величины  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_3$  их значениями

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_c F_1} \quad \text{и} \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_m F_3} = \frac{N_3 l_1 \cos \alpha}{E_m F_3}$$

и решая совместно (4.13) и (4.14), получаем:

$$N_3 = \frac{\delta E_m F_3}{l_3 \left[ 1 + \frac{E_m F_3}{2 E_c F_1 \cos^3 \alpha} \right]} ; \quad N_1 = \frac{N_3}{2 \cos \alpha}. \quad (4.15)$$

Знак плюс перед значениями усилий  $N_3$  и  $N_1$  показывает, что наши предположения об их направлении правильны.

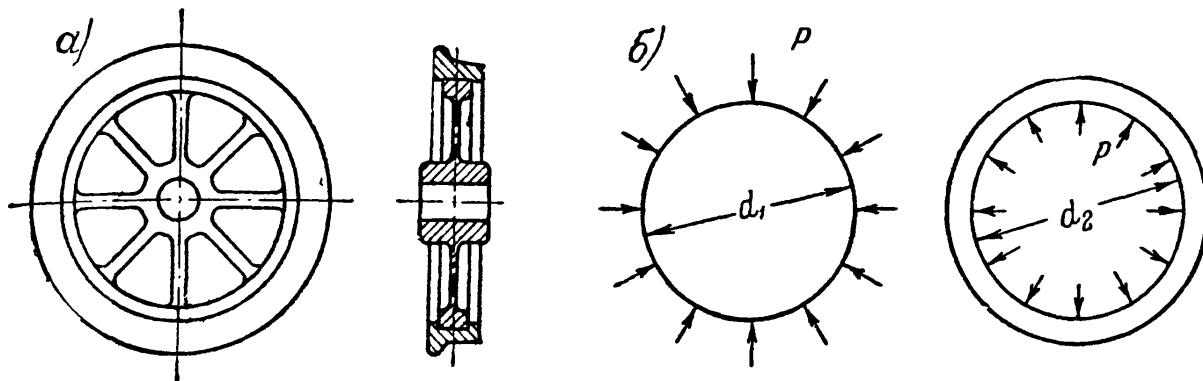
Отметим, что в формулу (4.3) можно подставлять взамен длины среднего стержня величину  $l_3$ , а не  $l_3 - \delta$ , ввиду малости  $\delta$  по сравнению с  $l_3$ . Это упрощение всегда следует применять при расчёте на неточность изготовления.

Приведённый расчёт показывает, что неточности изготовления влекут за собой напряжения в стержнях *даже при отсутствии внешних воздействий на конструкцию*. Таким образом, возможность появления так называемых *начальных* напряжений тоже является основным свойством статически неопределенных конструкций.

Если все три стержня будут сделаны из одного материала и одинаковой площади, то при действии груза  $Q$  (фиг. 39) растягивающее усилие в среднем стержне будет больше, чем в крайних (4.4); наличие рассмотренной неточности изготовления вызывает добавочное растягивающее усилие в среднем и сжимающие усилия в крайних стержнях; в этом примере наличие начальных напряжений

усиливает неравномерность работы стержней и является поэто-  
му вредным.

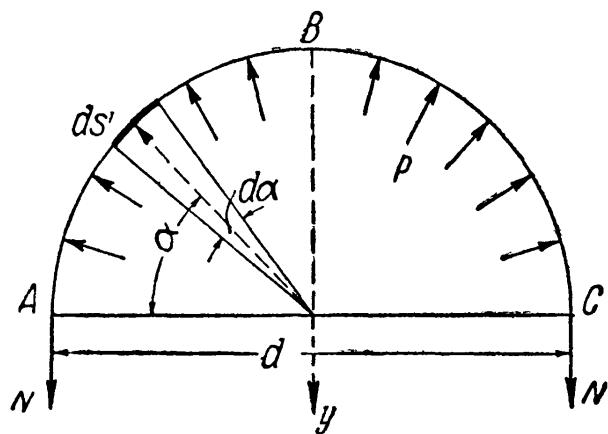
Если бы мы сделали средний стержень длиннее, чем следовало, на величину  $\delta$ , то начальные напряжения изменили бы знак и не-  
сколько выравняли бы неравномерность распределения усилий между  
средним и крайними стержнями под нагрузкой  $Q$ . В этом случае



Фиг. 43.

рассмотренное свойство статически неопределенных систем было бы использовано для улучшения работы конструкции.

Другим примером целесообразного использования начальных напряжений является посадка бандажей на колёса подвижного состава. Эти колёса состоят из двух частей: средней отливки — колёсного центра, и стального кованого кольца, надеваемого на центр, — бандажа (фиг. 43, а и б). Для закрепления бандажа на центре применяют специальные приспособления; кроме того, его внутренний диаметр  $d_2$  делают несколько меньше диаметра  $d_1$ ; обычно эта разница составляет  $\frac{1}{n} d_1$  — около  $\frac{1}{2000} d_1$ . При надевании бандажа на колёсный центр его нагревают настолько, чтобы внутренний диаметр его стал больше диаметра центра; надетый бандаж, охла-  
ждаясь, будет стремиться сжаться и будет стягивать центр. В бандаже возникнет растягивающее усилие  $N$ , а между бандажом и центром — реакция  $p$  (фиг. 43, б). Если мы разрежем бандаж по диаметру (фиг. 44), то две силы  $N$  должны уравновешивать сумму давлений на внутреннюю поверхность отрезанной части бандажа. Составим условие равновесия, проектируя все силы на ось  $y$  (фиг. 44); на элемент длины бандажа  $ds$  действует давление  $p ds$ ; его проекция



Фиг. 44.

на ось  $y$  равна  $-p ds \sin \alpha = -p \frac{d}{2} \sin \alpha d\alpha$ , так как  $ds = \frac{d}{2} d\alpha$ . Условие равновесия принимает вид

$$2N - \int_{ABC} p \frac{d}{2} \sin \alpha d\alpha = 0, \text{ или } 2N - \frac{pd}{2} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = 0.$$

Отсюда

$$2N - pd = 0 \quad \text{и} \quad N = \frac{pd}{2}, \quad \text{или} \quad p = \frac{2N}{d}.$$

Таким образом, для двух неизвестных  $N$  и  $p$  мы имеем одно уравнение статики; задача статически неопределенна. Для нахождения неизвестных усилий необходимо учесть совместность деформаций конструкции.

Растяжение бандажа и сжатие центра должны быть таковы, чтобы уравнялась разница в диаметрах  $d_1$  и  $d_2$ . Пренебрегая деформацией центра ввиду его массивности по сравнению с бандажом, получаем, что всё уравнивание разницы в диаметрах пойдёт за счёт удлинения бандажа. Если эта разница составляет  $\frac{1}{n}$  долю диаметра бандажа, то относительное удлинение  $\epsilon_n$  диаметра, а стало быть, и всего бандажа будет тоже  $\frac{1}{n}$ .

Относительное удлинение бандажа от усилия  $N$  будет  $\epsilon_N = \frac{N}{EF}$ , где  $F$  — площадь поперечного сечения бандажа. Приравнивая эти значения  $\epsilon_n = \epsilon_N$ , получаем добавочное уравнение

$$\frac{N}{EF} = \frac{1}{n}; \quad N = \frac{EF}{n} \quad \text{и} \quad p = \frac{2EF}{nd}. \quad (4.16)$$

Напряжение в бандаже равно  $\sigma = \frac{N}{F} = \frac{E}{n}$ .

В формулу (4.16) вместо  $d$  можно подставлять (вместо начального диаметра бандажа  $d_2$ ) диаметр центра  $d_1$ , так как обе эти величины отличаются друг от друга чрезвычайно мало.

Возьмём числовой пример (бандаж товарного вагона шириной 13 см и толщиной 7,5 см). Пусть

$$d = d_1 = 900 \text{ мм}; \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{1000}; \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2;$$

$$F = 7,5 \cdot 13 = 97,5 \text{ см}^2.$$

Тогда получаем:

$$\sigma = \frac{2 \cdot 10^6}{1000} = 2000 \text{ кг/см}^2; \quad N = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 97,5}{1000} = 195000 \text{ кг} = 195 \text{ т};$$

$$p = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 97,5}{90 \cdot 1000} = 4330 \text{ кг/см}.$$

### § 21. Расчёт на растяжение и сжатие стержней, состоящих из разнородных материалов.

Этот вид стержней относится к категории статически неопределенных. В качестве примера разберём определение размеров железобетонной колонны квадратного поперечного сечения со стороной  $a \text{ см}$  и высотой  $H \text{ м}$  (фиг. 45). Колонна сделана из бетона и снабжена продольными стальными прутьями, расположеными вблизи поверхности колонны, так называемой арматурой.

Обозначим:  $F_b$  — площадь поперечного сечения бетонной части колонны;  $F_c$  — площадь всех стержней арматуры;  $[\sigma_b]$  — допускаемое напряжение на сжатие для бетона;  $[\sigma_c]$  — то же для стали;  $E_b$  — модуль упругости для бетона;  $E_c$  — то же для стали.

Пусть требуется определить размеры колонны так, чтобы она могла взять на себя нагрузку  $P$ . Заметим, что  $F_b + F_c = a^2$ .

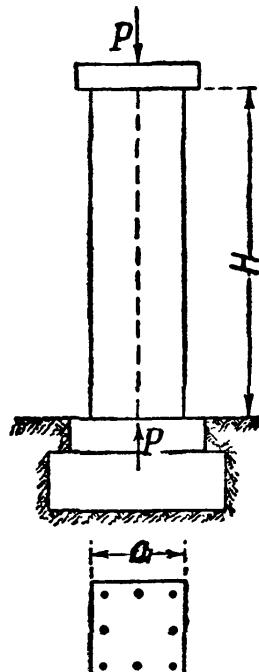
Найдём напряжения  $\sigma_b$  и  $\sigma_c$ , возникающие от нагрузки  $P$  по площадям  $F_b$  и  $F_c$ , и составим условия прочности.

На колонну действует приложенная в центре тяжести верхнего сечения сила  $P$ , уравновешивающаяся такой же (собственным весом колонны пренебрегаем) реакцией фундамента  $P$ . Часть  $P_b$  сжимающих колонну сил передаётся через бетон, часть  $P_c$  — через арматуру (фиг. 46). Для нахождения этих двух сил, вызывающих напряжения в бетоне и арматуре, мы имеем одно условие статики

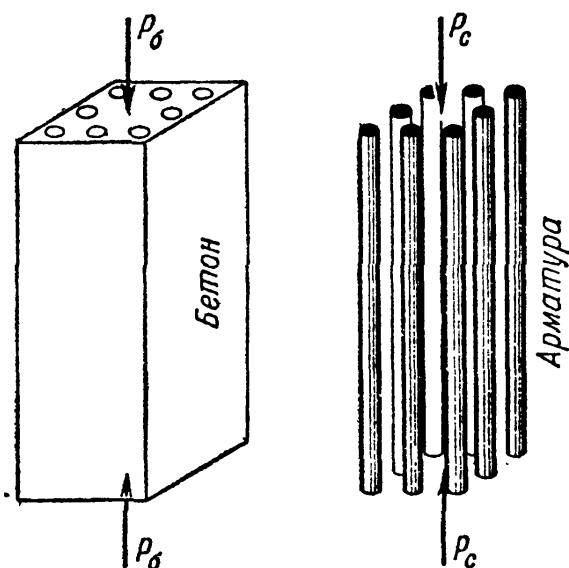
$$P'_c + P_b = P. \quad (4.17)$$

Задача является статически неопределенной; второе уравнение получается из рассмотрения совместности деформаций по условию, что как бетонная, так и стальная части колонны (фиг. 46) укоротятся на одну и ту же величину  $\Delta l$ , так как верхние и нижние плоскости обеих частей совпадают. По закону Гука имеем:

$$\Delta l = \frac{P_b H}{E_b F_b} = \frac{P_c H}{E_c F_c}; \quad (4.18)$$



Фиг. 45.



Фиг. 46.

это и будет второе уравнение, связывающее  $P_6$  и  $P_c$ . Из (4.18) находим

$$P_c = P_6 \frac{F_c E_c}{F_6 E_6};$$

подставляя это значение  $P_c$  в уравнение (4.17), получаем:

$$P_6 \left( 1 + \frac{F_c}{F_6} \cdot \frac{E_c}{E_6} \right) = P$$

и

$$P_6 = \frac{P}{1 + \frac{F_c}{F_6} \cdot \frac{E_c}{E_6}}; \quad P_c = \frac{P \frac{F_c}{F_6} \cdot \frac{E_c}{E_6}}{1 + \frac{F_c}{F_6} \cdot \frac{E_c}{E_6}} = \frac{P}{1 + \frac{F_6}{F_c} \frac{E_6}{E_c}}; \quad (4.19)$$

$$\sigma_6 = \frac{P}{F_6 + F_c \frac{E_c}{E_6}}; \quad \sigma_c = \frac{P}{F_c + F_6 \frac{E_6}{E_c}}. \quad (4.20)$$

Распределение усилий между элементами в статически неопределенных системах зависит от отношения площадей этих элементов и их модулей упругости. Из уравнения же (4.18), учитывая, что

$$\frac{P_6}{F_6} = \sigma_6 \quad \text{и} \quad \frac{P_c}{F_c} = \sigma_c,$$

получаем, что отношение напряжений в бетоне и стали зависит лишь от отношения модулей

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_6} = \frac{E_c}{E_6};$$

напряжения распределяются прямо пропорционально модулям упругости. Допустив, что при сжатии  $E_c = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$  и  $E_6 = 2 \times 10^5 \text{ кг/см}^2$ , получим  $\frac{E_c}{E_6} = 10$ , и напряжения в стали всегда окажутся лишь в 10 раз большими, чем напряжения в бетоне. Допускаемые же напряжения для стали примерно в 20 раз больше, чем допускаемые напряжения для бетона на сжатие. Поэтому напряжения в арматуре всегда будут ниже допускаемых.

Размеры колонны определяются из условия прочности бетона на сжатие:

$$\sigma_6 = \frac{P}{F_6 + F_c \frac{E_c}{E_6}} = \frac{P}{F_6 \left( 1 + \frac{F_c}{F_6} \cdot \frac{E_c}{E_6} \right)} \leq [\sigma_6]. \quad (4.21)$$

Необходимо теперь лишь задаться отношением  $\frac{F_c}{F_6}$ . Обычно площадь арматуры выражают в процентах от полной площади колонны  $F_c + F_6$  и задаются процентом армирования, не меньшим, чем  $0,4\% \div 0,2\%$ .

Обозначим  $\frac{F_c}{F_6 + F_c} = \frac{1}{m}$ ; так как площадь арматуры мала по сравнению с площадью бетона, то

$$\frac{F_c}{F_6 + F_c} = \frac{1}{m} \approx \frac{F_c}{F_6}.$$

Подставляя эту величину в условие (4.21), получаем

$$\frac{P}{F_6 \left(1 + \frac{E_c}{mE_6}\right)} = [\sigma_6] \quad \text{и} \quad F_6 = \frac{P}{[\sigma_6] \left(1 + \frac{E_c}{mE_6}\right)}.$$

Площадь арматуры будет равна

$$F_c = \frac{F_6}{m}.$$

Пусть  $P = 30 \text{ т}$ ;  $m = 100$  (арматуры  $1\%$ );  $\frac{E_c}{E_6} = 10$ ;  $[\sigma_6] = 45 \text{ кг/см}^2$  и  $[\sigma_c] = 1250 \text{ кг/см}^2$ . Тогда

$$F_6 = \frac{30000}{45 \left(1 + \frac{10}{100}\right)} = 605 \text{ см}^2; \quad F_c = \frac{605}{100} = 6,05 \text{ см}^2; \quad F_6 + F_c = 611 \text{ см}^2.$$

Берём колонну квадратного сечения  $25 \times 25 \text{ см}$  и ставим 4 стержня диаметром  $d = 14 \text{ мм}$  с общей площадью  $6,28 \text{ см}^2$ .

Вычисление деформаций для таких конструкций ведётся по общим правилам. Так как укорочение бетонной и стальной частей колонны одинаково, то безразлично, какой формулой в равенстве (4.18) воспользоваться для вычисления  $\Delta l$ .

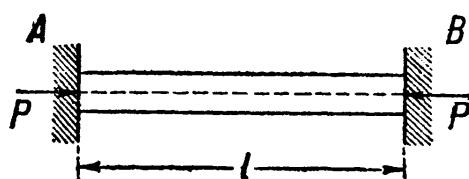
## § 22. Напряжения, возникающие при изменении температуры.

В статически неопределенных системах возникают напряжения при отсутствии внешних нагрузок не только от неточностей изготовления и сборки, но и от изменения температуры.

Довольно значительные напряжения этого типа получаются в рельсах, сваренных в одну непрерывную линию. При изменении температуры рельсов по отношению к той, при которой была произведена сварка, в них возникают либо растягивающие, либо сжимающие напряжения. Эту задачу можно схематизировать в таком виде: дан стержень, защемлённый неподвижно концами при температуре  $t_1$ ;

найти, какие возникнут в нём напряжения при изменении температуры до  $t_2$  (фиг. 47). Длина стержня  $l$ , площадь поперечного сечения  $F$ , модуль упругости  $E$ .

Выясним, какие силы будут действовать на стержень, если температура повысится от  $t_1$  до  $t_2$ . Стержень в таком случае стремится



Фиг. 47.

удлиниться и будет распирать опоры  $A$  и  $B$ . Со стороны этих опор на стержень будут действовать реакции, направленные, как показано на чертеже. Эти силы и будут вызывать *сжатие* стержня.

Их величины нельзя найти из условий статики, так как единственное условие равновесия даёт нам, что реакции опор в точках  $A$  и  $B$  равны и прямо противоположны. Величина же реакций  $P$  остаётся неизвестной, и конструкция оказывается статически неопределенной.

Для составления дополнительного уравнения учтём, что длина  $l$  стержня, закреплённого концами, остаётся и при нагревании неизменной; значит, укорочение  $\Delta l_P$ , вызываемое силами  $P$ , равно по абсолютной величине тому температурному удлинению  $\Delta l_t$ , которое стержень получил бы, если бы опора  $A$  осталась на месте, а конец  $B$  стержня был бы освобождён и мог бы перемещаться при нагревании. Значит,

$$\Delta l_t - \Delta l_P = 0. \quad (4.22)$$

Это и будет *условие совместности деформаций*; оно указывает на то, что и после повышения или понижения температуры длина стержня не изменилась, — он не оторвался от неподвижных опор.

Так как

$$\Delta l_P = \frac{Pl}{EF} \quad \text{и} \quad \Delta l_t = \alpha l (t_2 - t_1),$$

где  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения материала стержня, то

$$\frac{Pl}{EF} = \alpha l (t_2 - t_1)$$

и

$$\frac{P}{F} = \sigma = \alpha E (t_2 - t_1), \quad (4.23)$$

т. е. напряжение, вызванное изменением температуры в стержне *постоянного сечения* с жёстко защемлёнными концами, зависит лишь от модуля упругости материала, его коэффициента линейного расширения, разности температур и не зависит ни от его длины, ни от площади поперечного сечения.

Сила  $P$  равна

$$P = \alpha EF (t_2 - t_1).$$

В рассматриваемом примере при  $t_2 > t_1$  напряжение  $\sigma$  будет сжимающим, так как направление реакций  $P$  внутрь стержня здесь принято положительным. Если придерживаться обычно применяемого обозначения сжимающих напряжений знаком минус, а растягивающих знаком плюс, то для автоматического получения знака напряжений формула (4.23) должна быть написана так:

$$\sigma = -\alpha E(t_1 - t_2).$$

Когда поперечное сечение стержня не постоянно по его длине или он сделан из разных материалов, когда конструкция опор даёт ему возможность несколько изменить свою длину, или если эти условия имеют место одновременно, метод определения температурных напряжений, в основе своей оставаясь прежним, имеет всё же ряд особенностей.

Переменность сечения и различие в материалах необходимо учесть при подсчёте  $\Delta l$ , определяя его суммированием подсчётов, сделанных по каждому отдельному участку. Возможность для стержня несколько изменить свою длину отразится в уравнении совместности деформаций (4.22); разность деформаций, температурной и вызванной силами, в этом случае не будет равна нулю, а будет равна той величине, на которую наш стержень имеет возможность удлиниться.

Пример 9. Стальной стержень состоящий из двух частей длиной  $l_1 = 40 \text{ см}$  и  $l_2 = 60 \text{ см}$  и площадью соответственно  $F_1 = 10 \text{ см}^2$  и  $F_2 = 20 \text{ см}^2$ , защемлён одним концом; другой конец не доходит до опоры на величину  $\Delta_0 = 0,3 \text{ мм}$  (фиг. 48). Найти напряжения в обеих частях при повышении температуры на  $t = 50^\circ \text{C}$ , если  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$ .

Повышение температуры вызывает удлинение стержня  $\Delta l_t$ , а сжатие его реакциями опор  $P$  — укорочение  $\Delta l_P$ . Разность этих двух деформаций (по абсолютной величине) равна  $\Delta_0$  (см. фиг. 48):

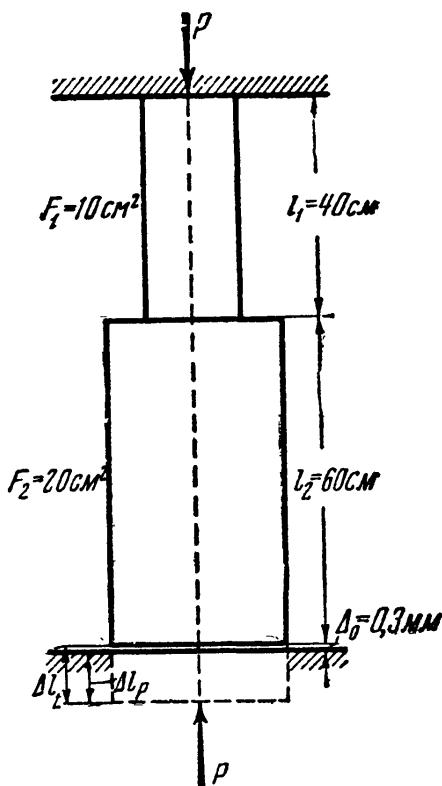
$$\Delta l_t - \Delta l_P = \Delta_0;$$

это и будет условие совместности деформаций. Величины  $\Delta l_t$  и  $\Delta l_P$  соответственно равны

$$\Delta l_t = \alpha t (l_1 + l_2); \quad \Delta l_P = \frac{Pl_1}{EF_1} + \frac{Pl_2}{EF_2} = \frac{Pl_1}{EF_1} \left[ 1 + \frac{l_2 F_1}{l_1 F_2} \right];$$

поэтому

$$\alpha t (l_1 + l_2) - \frac{Pl_1}{EF_1} \left[ 1 + \frac{l_2 F_1}{l_1 F_2} \right] = \Delta_0.$$



Фиг. 48.

Отсюда

$$\begin{aligned} P &= \frac{[\alpha t(l_1 + l_2) - \Delta_0] EF_1}{l_1 \left[ 1 + \frac{l_2 F_1}{l_1 F_2} \right]} = \\ &= \frac{[125 \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 50 - 0,03] 2 \cdot 10^6 \cdot 10}{40 \left[ 1 + \frac{60 \cdot 10}{40 \cdot 20} \right]} = 9300 \text{ кг.} \end{aligned}$$

Напряжение в верхней части равно

$$\sigma' = \frac{P}{F_1} = \frac{9300}{10} = 930 \text{ кг/см}^2;$$

в нижней части  $\sigma'' = \frac{P}{F_2} = \frac{9300}{20} = 465 \text{ кг/см}^2$  (оба напряжения — сжимающие).

Если бы зазора  $\Delta_0$  не было, то усилие и напряжения возросли бы в 1,92 раза.

### § 23. Одновременный учёт различных факторов.

Иногда в статически неопределенных конструкциях приходится одновременно учитывать влияние внешней нагрузки, изменения температуры и неточности изготовления. Решение таких задач возможно двумя путями: первый путь — это *одновременный* учёт всех факторов. В этом случае в уравнение совместности деформаций должны быть включены члены, отражающие влияние всех этих обстоятельств (нагрузки, температуры, неточности изготовления). Полученные в результате расчёта усилия и напряжения являются окончательными.

Второй путь расчёта подобных конструкций заключается в *раздельном* учёте усилий и напряжений, вызванных нагрузкой, температурой, неточностью изготовления. Решается как бы несколько отдельных задач, в каждой из которых учитывается *только один* из этих факторов. Окончательные усилия и напряжения определяются путём алгебраического *суммирования* этих величин, полученных при решении каждой из задач. Последний путь часто является более ясным и удобным, вызывая лишь небольшое увеличение количества выкладок. Он носит название *способа сложения действия сил*.

Рассмотренные до сих пор частные примеры расчёта статически неопределенных конструкций учитывали влияние лишь одного какого-нибудь фактора — внешней нагрузки, изменения температуры или неточности сборки. Для ознакомления с приёмом *одновременного учёта* всех этих обстоятельств решим следующий числовой пример.

**Пример 10.** Три параллельных вертикальных стержня одинаковой длины  $l = 2 \text{ м}$  поддерживают жёсткий брус  $AB$ , к которому приложена сила  $P = 4 \text{ т}$  (фиг. 49). Расстояния между стержнями и от среднего стержня до силы  $P$  соответственно равны:  $a = 1,5 \text{ м}$ ,  $b = 1 \text{ м}$  и  $c = 0,25 \text{ м}$ . Средний стержень выполнен короче проектного размера на  $\delta = 0,2 \text{ мм}$ . Данные о стержнях помещены в таблице 9.

Таблица 9. Данные к примеру 10.

№№ стержней	Материал	$F \text{ см}^2$	$E \text{ кг/см}^2$	$\alpha$
1	медь	2	$1 \cdot 10^6$	$17 \cdot 10^{-6}$
2	сталь	1	$2 \cdot 10^6$	$13 \cdot 10^{-6}$
3	сталь	3	$2 \cdot 10^6$	$13 \cdot 10^{-6}$

Температура конструкции во время её эксплуатации может повыситься на  $20^\circ\text{C}$ .

Определить напряжения в каждом из трёх стержней.

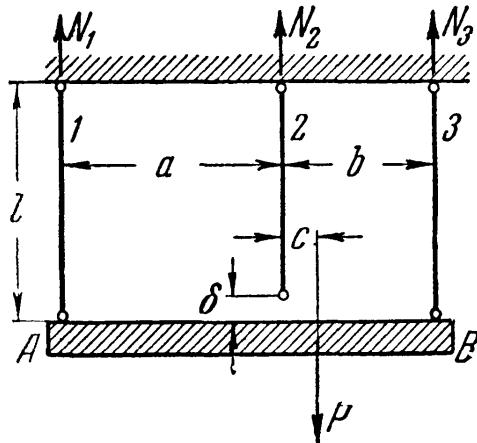
Предположим, что усилия во всех стержнях  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  будут растягивающими. Равные им реакции точек подвеса стержней показаны на фиг. 49. Уравнений равновесия ввиду параллельности всех сил мы можем составить два. Первое — сумма проекций на вертикаль — имеет следующий вид:

$$N_1 + N_2 + N_3 - P = 0. \quad (4.24)$$

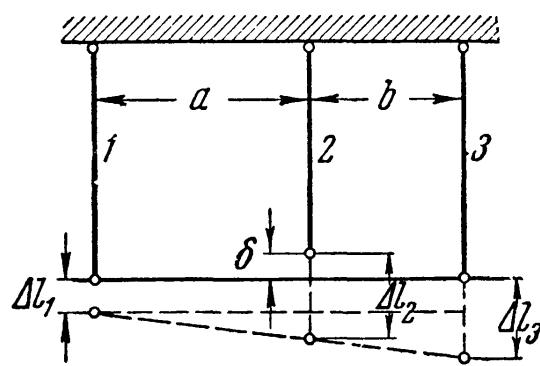
Для составления второго уравнения возьмём сумму моментов всех сил относительно точки подвеса второго стержня:

$$N_1 a - N_3 b + P c = 0. \quad (4.25)$$

Для определения трёх неизвестных усилий этих двух уравнений равновесия недостаточно. Необходимо обратиться к рассмотрению деформаций. На фиг. 50 показана схема деформаций нашей конструкции, составленная



Фиг. 49.



Фиг. 50.

в предположении растягивающих усилий во всех стержнях. Из рассмотрения этой схемы можно составить следующее условие совместности деформаций:

$$\frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{\Delta l_2 - \Delta l_1 - \delta} = \frac{a + b}{a}. \quad (4.26)$$

Значения входящих в это уравнение деформаций (с учётом влияния температуры) будут следующими:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{E_1 F_1} + \alpha_1 l \Delta t; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E_2 F_2} + \alpha_2 l \Delta t; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{E_3 F_3} + \alpha_3 l \Delta t.$$

Подставим эти значения деформаций в уравнение (4.26):

$$\frac{\frac{N_3 l}{E_3 F_3} + \alpha_3 l \Delta t - \frac{N_1 l}{E_1 F_1} - \alpha_1 l \Delta t}{\frac{N_2 l}{E_2 F_2} + \alpha_2 l \Delta t - \frac{N_1 l}{E_1 F_1} - \alpha_1 l \Delta t - \delta} = \frac{a + b}{a}. \quad (4.27)$$

Совместно решая уравнения (4.24), (4.25) и (4.27), определяем  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$ . Они будут равны:

$$N_1 = 792 \text{ кг}, \quad N_2 = 1020 \text{ кг} \quad \text{и} \quad N_3 = 2188 \text{ кг.}$$

Если бы наше предположение о направлении усилий для какого-нибудь стержня оказалось ошибочным, то мы получили бы отрицательное значение этого усилия.

Теперь находим соответствующие напряжения:

$$\text{в первом стержне } \sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{792}{2} = 396 \text{ кг/см}^2,$$

$$\text{во втором стержне } \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{1020}{1} = 1020 \text{ кг/см}^2,$$

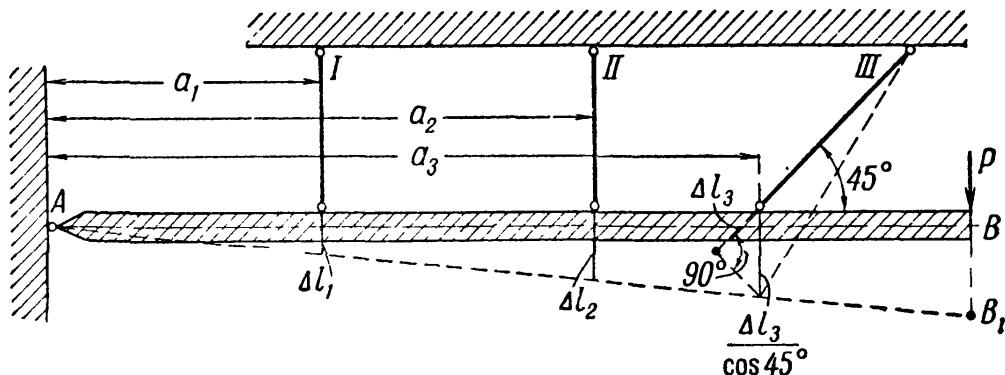
$$\text{и в третьем стержне } \sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{2188}{3} = 729 \text{ кг/см}^2.$$

Эта же задача могла бы быть решена при раздельном учёте влияний нагрузки, температуры и неточности изготовления с последующим алгебраическим суммированием напряжений. Результат был бы, конечно, такой же.

### § 24. Более сложные случаи статически неопределенных конструкций.

Во всех рассмотренных статически неопределенных задачах число неизвестных усилий на единицу превышало число уравнений статики; это — задачи однажды статически неопределенные; одно из неизвестных усилий может быть принято, как говорят, за лишнюю, не определяемую из уравнений статики, неизвестную.

Могут быть случаи, когда таких лишних неизвестных будет несколько; тогда придётся составить столько же дополнительных уравнений, рассматри-



Фиг. 51.

вая совместность деформаций системы. Это всегда возможно. Как пример можно указать конструкцию, изображённую на фиг. 51; очень жёсткий стержень шарнирно прикреплён к неподвижной опоре, подвешен на трёх стержнях и нагружен силой  $P$ .

Для стержня  $AB$  можно написать три уравнения равновесия; число же неизвестных будет пять: усилия в трёх подвесках и вертикальная и горизонтальная составляющие реакции в шарнире  $A$ .

Дополнительные уравнения можно написать, рассматривая деформацию системы. Так как стержень  $AB$  мы считаем очень жёстким, то его собствен-

ными деформациями можно пренебречь. Тогда он, оставаясь прямым, зайдёт положение  $AB_1$ . Из подобия треугольников можно найти соотношения между  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$  и  $\Delta l_3$ , что и даёт два дополнительных уравнения, а именно:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta l_1}{\frac{\Delta l_3}{\cos 45^\circ}} = \frac{a_1}{a_3}.$$

Дальнейший ход решения задачи подобен рассмотренному выше (§ 19).

## § 25. Примеры.

**Пример 11.** Стержень, защемлённый концами  $A$  и  $B$ , состоит из двух равных половин длиной  $\frac{l}{2}$  (фиг. 52,  $a$ ); верхняя половина изготовлена из стали, нижняя — из меди. Площади обеих частей стержня одинаковы и равны  $F = 20 \text{ см}^2$ . К среднему сечению приложена сила  $P = 6 \text{ т}$ , направленная по оси стержня сверху вниз от конца  $A$  к концу  $B$ . Найти напряжения в медной и стальной частях при повышении температуры на  $t = 30^\circ \text{ С}$ . Модули упругости равны  $E_c = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2$ ,  $E_m = 10^6 \text{ кг/см}^2$ . Коэффициенты линейного температурного расширения  $\alpha_c = 125 \cdot 10^{-7}$ ,  $\alpha_m = 165 \cdot 10^{-7}$ .

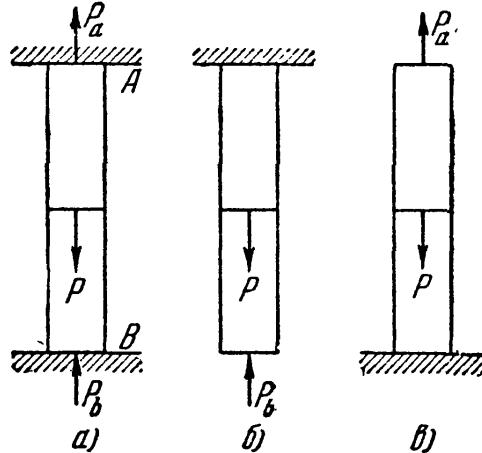
Реакции опор стержня принимаем направленными вверх и обозначаем  $P_a$  и  $P_b$  (фиг. 52,  $a$ ). Условие статики приводит к тому, что

$$P_a + P_b = P.$$

Для того чтобы лучше разобраться в имеющих место деформациях, предположим, что нижний конец стержня свободен, опора отсутствует (фиг. 52,  $b$ ). Это предположение не изменит работы конструкции при условии, что перемещение этого конца равно нулю и что действие опоры учтено наличием приложенной к нижнему концу реакции данной опоры — силы  $P_b$ . Полученный путём отбрасывания «лишнего» (против количества уравнений равновесия) закрепления статически определимый стержень называется *основной системой* нашей статически неопределенной конструкции. Заметим попутно, что мы могли бы выбрать и другую основную систему, хотя бы путём отбрасывания верхней опоры (фиг. 52,  $c$ ). Основную систему при этом пришлось бы загрузить, конечно, помимо силы  $P$  ещё и реакцией этой верхней отброшенной опоры.

Основная система, загруженная всеми нагрузками и реакциями всех опор, сохранённых и отброшенных, совершенно эквивалентна той статически неопределенной конструкции, из которой она получена при условии, что удовлетворены уравнения совместности деформаций. Эти уравнения составляются, исходя из тех ограничений, которые опоры статически неопределенной системы накладывают на деформации. Совместное их решение с уравнениями равновесия и определяет величины всех неизвестных.

В нашем случае условие совместности выражает ту мысль, что удлинение стержня от повышения температуры (при свободном нижнем конце) плюс удлинение верхней его части от силы  $P$  должно быть численно равно



Фиг. 52.

укорочению стержня от силы  $P_b$ :

$$\frac{l}{2} t\alpha_c + \frac{l}{2} t\alpha_m + \frac{Pl}{2E_c F} = \frac{P_b l}{2E_c F} + \frac{P_b l}{2E_m F}$$

или

$$\frac{t\alpha_c}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha_m}{\alpha_c} \right] + \frac{P}{2E_c F} = \frac{P_b}{2E_c F} \left[ 1 + \frac{E_c}{E_m} \right].$$

Отсюда находим реакцию  $P_b$ , а из условия статики и  $P_a$ :

$$P_b = \frac{P}{1 + \frac{E_c}{E_m}} + \frac{t\alpha_c \left[ 1 + \frac{\alpha_m}{\alpha_c} \right] E_c F}{1 + \frac{E_c}{E_m}},$$

$$P_a = P - P_b = \frac{P}{1 + \frac{E_m}{E_c}} - \frac{t\alpha_c \left[ 1 + \frac{\alpha_m}{\alpha_c} \right] E_c F}{1 + \frac{E_c}{E_m}}.$$

Обе реакции состоят из двух слагаемых — первого, вызванного силой  $P$ , и второго, вызванного действием температуры; мы могли бы изменить порядок решения задачи и находить отдельно реакции и напряжения от силы  $P_b$  и от повышения температуры, а потом их суммировать (способ сложения действия сил).

Реакции от силы  $P$  обе направлены вверх, а от действия температуры — реакция опоры  $B$  вверх, а опоры  $A$  — вниз (минус в формуле для  $P_a$ ). Таким образом, весь стержень будет сжат температурными реакциями, и кроме того, верхняя часть будет растянута, а нижняя сжата силами:

$$\frac{P}{1 + \frac{E_m}{E_c}} \text{ и } \frac{P}{1 + \frac{E_c}{E_m}}.$$

Поэтому, обозначая растягивающие напряжения знаком  $+$ , а сжимающие  $-$ , получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_c &= + \frac{P}{\left(1 + \frac{E_m}{E_c}\right) F} - \frac{t\alpha_c \left[ 1 + \frac{\alpha_m}{\alpha_c} \right] F_c}{1 + \frac{E_c}{E_m}} = \\ &= \frac{6000}{\left[1 + \frac{10^6}{2 \cdot 10^6}\right] 20} - \frac{30 \cdot 125 \cdot 10^{-7} \left[1 + \frac{165}{125}\right] 2 \cdot 10^6}{1 + \frac{2 \cdot 10^6}{10^6}} = \\ &= 200 - 580 = -380 \text{ кг/см}^2 \end{aligned}$$

для сечений верхней части и

$$\begin{aligned}\sigma_m &= -\frac{P}{\left[1 + \frac{E_c}{E_m}\right]F} - \frac{t\alpha_c \left[1 + \frac{\alpha_m}{\alpha_c}\right] E_c}{1 + \frac{E_c}{E_m}} = \\ &= -\frac{6000}{\left[1 + \frac{2 \cdot 10^6}{10^6}\right] 20} - 580 = -680 \text{ кг/см}^2\end{aligned}$$

для сечений нижней части. Необходимо обратить внимание на то, что при решении задачи удобно преобразовывать формулы так, чтобы в них входили отношения больших величин ( $E$ ) или малых ( $\alpha$ ); это упрощает числовые расчёты.

**Пример 12.** Стержень защемлён верхним концом  $A$  и не доходит до нижней опоры  $B$  на величину  $\Delta l_0 = 1,25 \text{ мм}$ ; верхняя часть стержня медная, длиной  $l_m = 1,6 \text{ м}$ , площадью  $F_m = 10 \text{ см}^2$ ; нижняя часть — стальная, площадью  $F_c = 20 \text{ см}^2$  и длиной  $l_c = 0,8 \text{ м}$ . Сила  $P = 10 \text{ т}$  приложена по оси стержня вниз в месте раздела обеих частей. Найти напряжения в сечениях стальной и медной части.

Для нахождения напряжений определим реакции  $P_A$  и  $P_B$ ; предполагаем их направленными вверх. Условие равновесия даёт:

$$P_A + P_B = P.$$

Условие совместности деформаций выражает ту мысль, что разность величин удлинения верхней части и укорочения нижней равна зазору  $\Delta l_0$ :

$$\Delta l_m - \Delta l_c = \Delta l_0$$

или

$$\frac{P_A l_m}{E_m F_m} - \frac{P_B l_c}{E_c F_c} = \Delta l_0.$$

Заменяя  $P_B$  через  $P - P_A$ , получаем:

$$\frac{P_A l_m}{E_m F_m} + \frac{P_A l_c}{E_c F_c} = \frac{P l_c}{E_c F_c} + \Delta l_0.$$

Отсюда

$$\frac{P_A l_c}{E_c F_c} \left[ 1 + \frac{l_m E_c F_c}{l_c E_m F_m} \right] = \frac{P l_c}{E_c F_c} + \Delta l_0$$

и

$$P_A = \frac{P + \frac{\Delta l_0}{l} E_c F_c}{1 + \frac{l_m E_c F_c}{l_c E_m F_m}}, \quad P_B = \frac{P - \frac{\Delta l_0}{l_m} E_m F_m^2}{1 + \frac{l_c E_m F_m}{l_m E_c F_c}}.$$

Подставляя числовые значения, имеем:

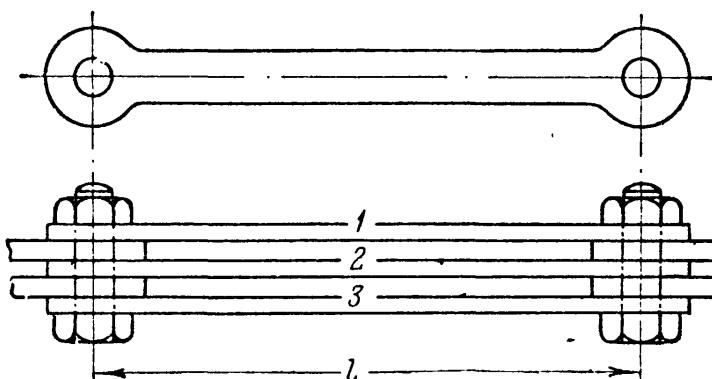
$$P_A = \frac{10000 + \frac{1,25}{80 \cdot 10} \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^6}{1 + \frac{160 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^6}{80 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 8050 \text{ кг};$$

$$\sigma_m = \frac{P_A}{F_m} = \frac{8050}{10} = 805 \text{ кг/см}^2 \text{ (растяжение);}$$

$$P_B = \frac{10000 - \frac{1,25}{160 \cdot 10} 10 \cdot 10^6}{1 + \frac{80 \cdot 10 \cdot 10^6}{160 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^6}} = 1950 \text{ кг};$$

$$\sigma_c = \frac{P_B}{F_c} = \frac{1950}{20} = 97,5 \text{ кг/см}^2 \text{ (сжатие).}$$

Пример 13. Определить начальные напряжения в трёх полосах звена цепи висячего моста (фиг. 53), если средняя полоса будет короче крайних на



Фиг. 53.

$$\delta = \frac{l}{2000}, \text{ где } l \text{ — длина полос.}$$

Материал полос — сталь. Полосы соединены болтами, проходящими через проушины. Деформацией болтов можно пренебречь. Схема конструкции и картина деформации даны на фиг. 54.

Сжимающие усилия в крайних полосах обозначаем  $N_1$  и  $N_3$ , растягивающее усилие в средней  $N_2$ ; условия статики приводят к уравнениям

$$N_1 + N_3 = N_2$$

и

$$N_1 = N_3,$$

или

$$2N_1 = N_2.$$

Условие совместности деформаций выражает, что сумма числовых значений удлинения средней полосы и укорочения крайней равна  $\delta$  (фиг. 54):

$$\delta = \Delta l_1 + \Delta l_2.$$



Фиг. 54.

Обозначая длину полос  $l$ , а их площадь  $F$ , получаем:

$$\delta = \frac{N_1 l}{E F} + \frac{N_2 l}{E F}.$$

Так как  $N_1 = \frac{N_2}{2}$ , то

$$\delta = \frac{N_2 l}{2 E F} + \frac{N_2 l}{E F} = \frac{3 N_2 l}{2 E F};$$

отсюда напряжение в средней полосе равно

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{2\delta E}{3l} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^6}{3 \cdot 2000} = 667 \text{ кг/см}^2 \text{ (растяжение).}$$

Напряжения в крайних полосах будут вдвое меньшими и сжимающими.

Пример 14. Стальной болт диаметром  $d_1 = 30 \text{ мм}$  проходит внутри чугунной трубы (фиг. 55), внутренний диаметр которой равен

$$d_2 = 32 \text{ мм},$$

а наружный

$$d_3 = 62 \text{ мм.}$$

Гайка болта завинчена настолько, что головка и шайба соприкасаются с концами трубы, но болт ещё не натянут. Длина трубы  $l = 500 \text{ мм}$ ,  $E_c = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $E_q = 1,2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ . На какую длину надо навернуть гайку на болт, чтобы вызвать в нём напряжение  $P = 12 \text{ т}$ ? Какие напряжения будут в чугунной трубке?

Навинчивание гайки вызовет реакции между шайбой и торцом трубы. Эти реакции будут сжимать трубку и растягивать болт; надо добиться, чтобы они были равны 12 т. Укорочение трубы плюс удлинение болта и составят то перемещение  $\Delta$ , на которое надо навернуть гайку, чтобы вызвать заданное напряжение болта.

Площадь сечения трубы равна

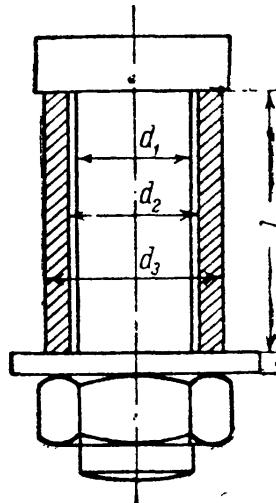
$$F_t = \frac{\pi}{4} (d_3^2 - d_2^2) = \frac{\pi}{4} (6,2^2 - 3,2^2) = 22,1 \text{ см}^2.$$

Площадь сечения болта равна

$$F_b = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi 3^2}{4} = 7,07 \text{ см}^2.$$

Необходимое перемещение гайки равно

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{Pl}{E_c F_b} + \frac{Pl}{E_q F_t} = \frac{Pl}{E_c F_b} \left[ 1 + \frac{E_c F_b}{E_q F_t} \right] = \\ &= \frac{12000 \cdot 500}{2 \cdot 10^6 \cdot 7,07} \left[ 1 + \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 7,07}{1,2 \cdot 10^6 \cdot 22,1} \right] \approx 0,65 \text{ мм.} \end{aligned}$$



Фиг. 55.

## ГЛАВА V.

### РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ ПО ДОПУСКАЕМЫМ НАГРУЗКАМ.

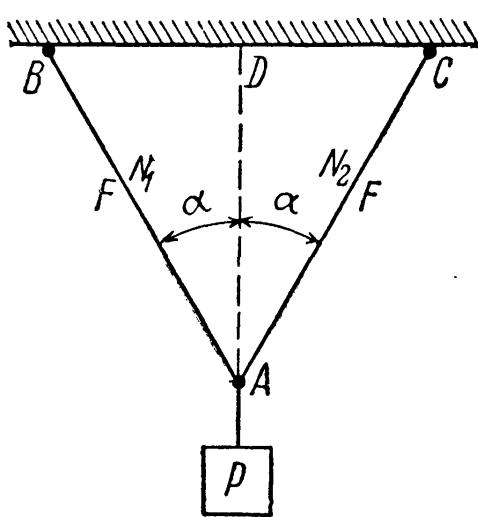
#### § 26. Понятие о расчёте по допускаемым нагрузкам. Применение к статически определимым системам.

В предыдущем изложении методов расчёта на растяжение и сжатие как статически определимых, так и неопределенных конструкций мы исходили (§§ 4 и 19) из основного условия прочности  $\sigma_{max} \leq [σ]$ . Это неравенство требует выбора размеров конструкции с таким расчётом, чтобы наибольшее напряжение в самом опасном месте не превосходило допускаемого.

Но можно ставить на другую точку зрения (§ 4). Можно задать условие, чтобы действительная нагрузка на всю конструкцию не превосходила некоторой допускаемой величины. Условие это можно выразить таким неравенством:

$$P_{\max} \leq P_{\text{доп.}}$$

За допускаемую нагрузку надо выбрать некоторую  $\frac{1}{k}$  часть той нагрузки, при которой конструкция перестанет функционировать правильно, перестанет выполнять своё назначение. Такая нагрузка обычно называется *пределной*, иногда — *разрушающей* в широком смысле слова (под разрушением конструкции подразумеваются прекращение её нормальной работы).



Фиг. 56.

В качестве примера возьмём систему из двух стальных стержней  $AB$  и  $AC$  (фиг. 56), нагруженных силой  $P$ . Рассчитывая эту систему обычным путём, найдём усилия  $N_1 = N_2$  по формуле

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2 \cos \alpha} = N$$

(из равновесия узла  $A$ ). Отсюда площадь каждого из стержней равна

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{P}{2 [\sigma] \cos \alpha}.$$

По способу допускаемых нагрузок имеем

$$P \leq P_{\text{доп.}}$$

Введя в качестве коэффициента запаса для конструкции в целом ту же величину  $k$ , которая была принята в качестве коэффициента запаса для напряжений, мы получим, что величина  $P_{\text{доп.}} = \frac{P_{\text{пр}}}{k}$ . Предельной, опасной величиной  $P_{\text{пр}}$  будет та, при которой напряжения в стержнях дойдут до предела текучести:

$$P_{\text{пр}} = 2F_{\sigma_T} \cos \alpha. \quad (\text{a})$$

Таким образом, допускаемая величина  $P$  равна

$$P_{\text{доп.}} = \frac{2F_{\sigma_T} \cos \alpha}{k}.$$

Условие прочности (а) принимает вид

$$P \leq \frac{2F_{\sigma_t} \cos \alpha}{k},$$

а учитывая, что  $\frac{\sigma_t}{k} = [\sigma]$ , получаем

$$P \leq 2F[\sigma] \cos \alpha.$$

Отсюда

$$F \geq \frac{P}{2[\sigma] \cos \alpha}.$$

Таким образом, расчёт по допускаемым нагрузкам привёл в данном случае к тем же результатам, что и расчёт по допускаемым напряжениям. Это всегда имеет место для статически определимых конструкций при равномерном распределении напряжений, когда материал по всему сечению используется полностью.

### § 27. Расчёт статически неопределенных систем по способу допускаемых нагрузок.

Совсем другие результаты мы получим, если будем применять способ допускаемых нагрузок к статически неопределенным системам, стержни которых изготовлены из материала, обладающего способностью к большим пластическим деформациям, например из малоуглеродистой стали.

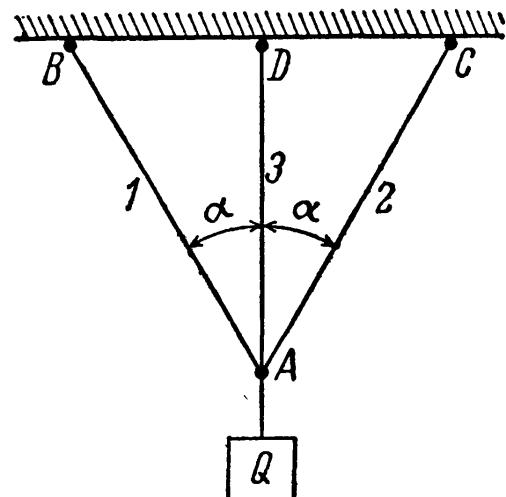
В качестве примера рассмотрим систему из трёх стержней, нагруженных силой  $Q$  (фиг. 57). Пусть все стержни сделаны из малоуглеродистой стали с пределом текучести  $\sigma_t$ . Длины крайних стержней, как и выше, обозначим  $l_1$ , длину среднего  $l_3$ . Допускаемое напряжение  $[\sigma] = \frac{\sigma_t}{k}$ . Как

и раньше, при расчёте этой статически неопределенной системы зададимся отношением площадей стержней; примем, что все три стержня будут иметь одинаковую площадь  $F$ . Тогда, решая задачу так, как это указано в § 19, получим:

$$N_3 = \frac{Q}{1 + 2\cos^3 \alpha}; \quad N_1 = \frac{Q \cos^3 \alpha}{1 + 2\cos^3 \alpha} = N_2.$$

Так как  $N_3 > N_1$ , средний стержень напряжён больше, чем крайние; поэтому подбор площади сечения  $F$  надо произвести по формуле

$$F \geq \frac{N_3}{[\sigma]} = \frac{Q}{(1 + 2 \cos^3 \alpha) [\sigma]}.$$



Фиг. 57.

Ту же величину площади надо дать и боковым стержням; в них получается некоторый дополнительный запас.

Применим способ допускаемых нагрузок; условием прочности будет:

$$Q \leq Q_{\text{доп}} = \frac{Q_{\text{пр}}}{k}.$$

Что в данном случае следует понимать под предельной нагрузкой конструкции? Так как конструкция выполнена из материала, имеющего площадку текучести, то, по аналогии с простым растяжением стержня из такого материала, за предельную нагрузку следует взять груз, соответствующий достижению состояния текучести для всей конструкции в целом. Назовём эту нагрузку  $Q_t^k$ . Пока сила  $Q$  не достигла этого значения, для дальнейшей деформации (опускания точки  $A$ ) требуется возрастание нагрузки. Когда же  $Q$  сделается равным  $Q_t^k$ , дальнейший рост деформаций будет происходить уже без увеличения нагрузки, — конструкция выйдет из строя.

Для определения величины  $Q_t^k$  рассмотрим постепенный ход деформации нашей стержневой системы. Так как средний стержень напряжён сильнее крайних, то в нём раньше, чем в других, напряжение дойдёт до предела текучести. Нагрузку, соответствующую этому моменту, обозначим  $Q_t$ ; она будет равна

$$Q_t = (1 + 2 \cos^3 \alpha) N_3^t,$$

где  $N_3^t = F\sigma_t$  — усилие в среднем стержне, соответствующее его пределу текучести.

Напряжения в крайних стержнях, имеющих ту же площадь, в этот момент ещё не дойдут до предела текучести, и эти стержни

будут упруго сопротивляться дальнейшей деформации. Для того чтобы эта деформация происходила, необходимо дальнейшее увеличение нагрузки до тех пор, пока в *крайних* стержнях напряжения тоже не дойдут до предела текучести. Лишь тогда будет достигнута предельная грузоподъёмность конструкции  $Q_t^k$ .

Так как при нагрузке  $Q_t$  напряжения в среднем стержне дойдут уже до предела текучести  $\sigma_t$ , то при дальнейшем возрастании груза они, а стало быть и усилие  $N_3$ , останутся без увеличения. Наша статически неопределённая система превратится в статически определимую, состоящую из двух стержней  $AB$  и  $AC$  и нагруженную в точке  $A$  силой  $Q$ , направленной вниз, и известным усилием  $N_3^t$ , равным  $F\sigma_t$  (фиг. 58).

Фиг. 58.

Фиг. 58. Схема стержневой системы, состоящей из трех стержней  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$ . Стержень  $BC$  горизонтален, соединяя вершины  $B$  и  $C$  консольных балок  $AB$  и  $AC$ . Стержень  $AB$  наклонен к горизонту под углом  $\alpha$  и соединяет точку  $B$  с точкой  $A$ , в которой приложена сила  $Q$  вниз. Стержень  $AC$  наклонен к горизонту под тем же углом  $\alpha$  и соединяет точку  $C$  с точкой  $A$ . В точке  $B$  приложена сила  $N_3^t = F\sigma_t$  вправо. Точка  $D$  расположена на горизонтальном стержне  $BC$  между точками  $B$  и  $C$ .

Такая схема работы нашей конструкции будет иметь место, пока

$$Q_t \leq Q \leq Q_t^k.$$

Для иллюстрации хода деформации рассматриваемой конструкции изобразим графически зависимость между силой  $Q$  и перемещением  $f$  точки  $A$  (фиг. 59). Пока  $Q \leq Q_t$ , опускание точки  $A$  равно удлинению среднего стержня и определяется формулой

$$f_{01} = \Delta l_3 = \frac{Ql_3}{(1 + 2 \cos^3 \alpha) EF}.$$

Как только  $Q$  будет заключаться в промежутке  $Q_t \leq Q \leq Q_t^k$ , перемещение точки  $A$  должно быть вычислено, как опускание этого узла в системе двух стержней  $AC$  и  $AB$ , нагруженных в точке  $A$  силой  $(Q - F_{\sigma_t})$ . Из фиг. 41 мы видим, что это опускание равно

$$f = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha};$$

в свою очередь

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF}; \quad N_1 = \frac{Q - F_{\sigma_t}}{2 \cos \alpha}.$$

Отсюда

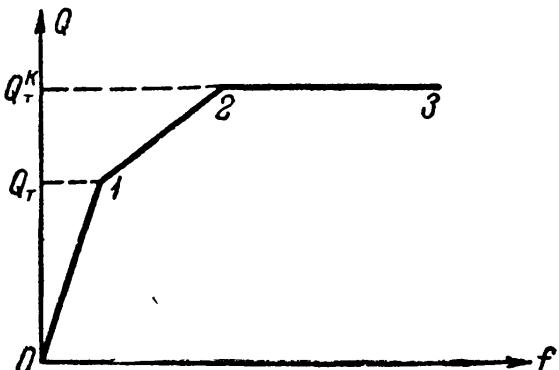
$$\Delta l_1 = \frac{(Q - F_{\sigma_t}) l_1}{2EF \cos \alpha},$$

$$f_{12} = \frac{(Q - F_{\sigma_t}) l_1}{2EF \cos^3 \alpha} = \frac{(Q - F_{\sigma_t}) l_3}{2EF \cos^3 \alpha}.$$

Для  $f_{12}$  (на втором участке) получаем уравнение прямой, но уже не проходящей через начало координат. После достижения нагрузкой  $Q$  значения  $Q_t^k$  напряжения в крайних стержнях достигнут предела текучести, и система будет деформироваться без увеличения нагрузки. График перемещения идет теперь параллельно оси абсцисс.

Для определения предельной грузоподъёмности всей системы  $Q_t^k$  мы должны для системы двух стержней, нагруженных силой  $(Q - F_{\sigma_t})$ , найти то значение  $Q$ , при котором напряжения и в крайних стержнях дойдут до предела текучести. Такая задача решена в предыдущем параграфе; подставляя в выражение (а) § 26 вместо  $P$  величину  $Q - F_{\sigma_t}$ , получаем:

$$(Q - F_{\sigma_t})_{\text{пп}} = Q_t^k - F_{\sigma_t} = 2F_{\sigma_t} \cos \alpha.$$



Фиг. 59.

Отсюда

$$Q_t^k = F\sigma_t(1 + 2 \cos \alpha).$$

Допускаемая нагрузка будет равна

$$Q_{\text{доп}} = \frac{Q_t^k}{k} = \frac{F\sigma_t(1 + 2 \cos \alpha)}{k},$$

а учитывая, что  $\frac{\sigma_t}{k} = [\sigma]$ , получаем

$$Q_{\text{доп}} = F[\sigma](1 + 2 \cos \alpha).$$

Окончательно:

$$Q \leq Q_{\text{доп}} = F[\sigma](1 + 2 \cos \alpha) \quad \text{и} \quad F \geq \frac{Q}{[\sigma](1 + 2 \cos \alpha)}.$$

Эта величина меньше, чем полученная обычным методом расчёта, т. е.

$$\frac{Q}{[\sigma](1 + 2 \cos^3 \alpha)}.$$

При  $Q = 4 \text{ т}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $[\sigma_c] = 1000 \text{ кг/см}^2$  (сталь) получаем: по обычному способу

$$F = \frac{4000}{1000(1 + 2 \cos^3 30^\circ)} = 1,74 \text{ см}^2;$$

по способу допускаемых нагрузок

$$F = \frac{4000}{1000(1 + 2 \cos 30^\circ)} = 1,46 \text{ см}^2.$$

Таким образом, метод расчёта по допускаемым нагрузкам позволяет спроектировать статически неопределенную систему из материала, обладающего площадкой текучести, *экономичнее*, чем при расчёте по допускаемым напряжениям. Это понятно: при способе расчёта по допускаемым напряжениям мы считали за предельную нагрузку нашей конструкции величину  $Q_t$ , при которой до предела текучести доходил лишь материал среднего стержня, крайние же были недонапряжены. При методе расчёта по допускаемым нагрузкам предельная грузоподъёмность определяется величиной  $Q_t^k > Q_t$ . При нагрузке  $Q_t^k$  полностью используется материал всех трёх стержней.

Таким образом, новый метод расчёта позволяет реализовать скрытые при старом способе запасы прочности в статически неопределенных системах, добиться повышения их *расчётной* грузоподъёмности и действительной *равнопрочности* всех частей конструкции. Не представит никаких затруднений распространить этот метод на случай, когда соотношение площадей среднего и крайних стержней не будет равно единице.

Изложенные выше теоретические соображения проверялись неоднократно на опыте, причём всегда наблюдалась достаточно близкая сходимость величин предельной нагрузки — вычисленной и определённой при эксперименте. Это даёт уверенность в правильности теоретических предпосылок метода допускаемых нагрузок.

### § 28. Применение способа допускаемых нагрузок к расчёту железобетонных стержней.

В § 21 показан расчёт железобетонной колонны на сжатие по методу допускаемых напряжений. Как мы видели, в этом случае не удалось добиться равнопрочности: напряжения в бетоне достигли допускаемых, а в арматуре — не достигли.

Применим способ допускаемых нагрузок. Условие прочности имеет вид:

$$P \leq P_{\text{доп.}}$$

Для установления  $P_{\text{доп}}$  надо найти предельное значение  $P_{\text{пр}}$  для всей колонны и разделить его на коэффициент запаса.

Опыты показали, что при сжатии железобетонных колонн бетон после достижения напряжениями предела прочности на сжатие начинал сдавать; появлялась своеобразная «текучесть» бетона, постепенно разрушающегося, но поддерживаемого арматурой; колонна продолжала укорачиваться при постоянных напряжениях в бетоне и возрастающих в арматуре; разрушение наступало, когда в арматуре напряжения доходили до предела текучести. Такая картина разрушения наблюдалась в колоннах с арматурой из малоуглеродистой стали, хорошо укреплённой хомутами против бокового выпучивания.

Проделанные в СССР в большом количестве опыты показали, что для железобетонных колонн указанного выше типа предельная нагрузка равна сумме предельных нагрузок бетонной и стальной частей:

$$P_{\text{пр}} = F_b \sigma_b + F_c \sigma_t,$$

где  $F_b$  — площадь бетона;  $F_c$  — площадь арматуры;  $\sigma_b$  — предел прочности бетона при сжатии;  $\sigma_t$  — предел текучести стали. В таком случае

$$P_{\text{доп.}} = \frac{P_{\text{пр}}}{k} = F_b [\sigma_b] + F_c [\sigma_t].$$

Условие прочности принимает вид

$$P \leq (F_b [\sigma_b] + F_c [\sigma_t]) = F_b \left( [\sigma_b] + [\sigma_t] \frac{F_c}{F_b} \right).$$

Задаваясь отношением  $\frac{F_c}{F_b}$  или процентом армирования, получаем:

$$F_b \geq \frac{P}{[\sigma_b] + [\sigma_t] \frac{F_c}{F_b}}.$$

Применим этот способ к примеру, рассмотренному в § 21. Имеем:

$$P = 30 \text{ т}; \quad [\sigma_b] = 45 \text{ кг/см}^2; \quad [\sigma_t] = 1250 \text{ кг/см}^2; \quad \frac{F_c}{F_b} = \frac{1}{100}.$$

Следовательно,

$$F_6 = \frac{30\,000}{45 + \frac{1}{100} \cdot 1250} = 522,5 \text{ см}^2,$$

т. е. меньше, чем полученная в § 21 величина (605 см<sup>2</sup>).

Благодаря работам советских учёных проф. Лолейта, проф. Гвоздева и др. этот метод расчёта прежде, чем в других странах, был введён в СССР и принят некоторыми нашими нормами.

## ГЛАВА VI.

### УЧЁТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ. РАСЧЁТ ГИБКИХ НИТЕЙ.

#### § 29. Подбор сечений с учётом собственного веса (при растяжении и сжатии).

При установлении внешних сил, растягивающих или сжимающих элементы конструкций, мы до сих пор игнорировали собственный вес этих элементов. Возникает вопрос, не вносится ли этим упрощением расчёта слишком большая погрешность? В связи с этим

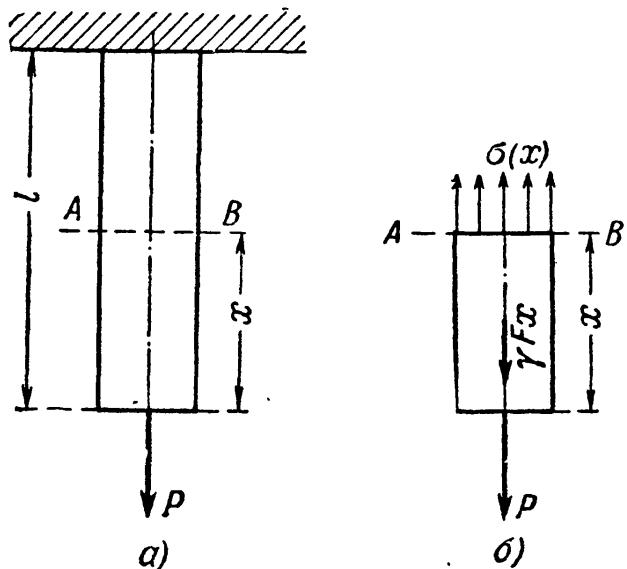
подсчитаем величины напряжений и деформаций при учёте влияния собственного веса растянутых или сжатых стержней.

Пусть вертикальный стержень (фиг. 60, а) закреплён своим верхним концом; к нижнему его концу подвешен груз  $P$ . Длина стержня  $l$ , площадь поперечного сечения  $F$ , удельный вес материала  $\gamma$  и модуль упругости  $E$ . Подсчитаем напряжения по сечению  $AB$ , расположенному на расстоянии  $x$  от свободного конца стержня.

Рассечём стержень сечением  $AB$  и выделим нижнюю часть

длиной  $x$  с приложенными к ней внешними силами (фиг. 60, б) — грузом  $P$  и её собственным весом  $\gamma Fx$ . Эти две силы уравновешиваются напряжениями, действующими на площадь  $AB$  от отброшенной части. Эти напряжения будут нормальными, равномерно распределёнными по сечению и направленными наружу от рассматриваемой части стержня, т. е. растягивающими. Величина их будет равна

$$\sigma(x) = \frac{P + \gamma Fx}{F} = \frac{P}{F} + \gamma x. \quad (6.1)$$



Фиг. 60.

Таким образом, при учёте собственного веса нормальные напряжения оказываются неодинаковыми во всех сечениях. Наиболее напряжённым, *опасным*, будет верхнее сечение, для которого  $x$  достигает наибольшего значения  $l$ ; напряжение в нём равно

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l. \quad (6.2)$$

Условие прочности должно быть выполнено именно для этого сечения:

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{P}{F} + \gamma l \right) \leq [\sigma]. \quad (6.3)$$

Отсюда необходимая площадь стержня равна

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (6.4)$$

От формулы, определяющей площадь растянутого стержня без учёта влияния собственного веса, эта формула отличается лишь тем, что из допускаемого напряжения вычитается величина  $\gamma l$ .

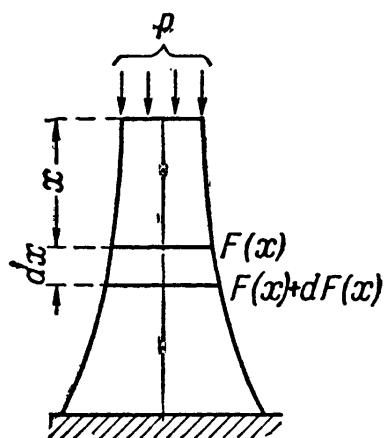
Чтобы оценить значение этой поправки, подсчитаем её для двух случаев. Возьмём стержень из мягкой стали длиной 10 м; для него  $[\sigma] = 1400 \text{ кг}/\text{см}^2$ , а величина  $\gamma l = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 7,85 \text{ кг}/\text{см}^2$ . Таким образом, для стержня из мягкой стали поправка составит  $\frac{7,85}{1400}$ , т. е. около 0,6%. Теперь возьмём кирпичный столб высотой тоже 10 м; для него  $[\sigma] = 12 \text{ кг}/\text{см}^2$ , а величина  $\gamma l = 1,8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 1,8 \text{ кг}/\text{см}^2$ . Таким образом, для кирпичного столба поправка составит  $\frac{1,8}{12}$ , т. е. уже 15%.

Вполне понятно, что влиянием собственного веса при растяжении и сжатии стержней можно пренебречь, если мы не имеем дела с длинными стержнями или со стержнями из материала, обладающего сравнительно небольшой прочностью (камень, кирпич) при достаточном весе. При расчёте длинных канатов подъёмников, различного рода длинных штанг и высоких каменных сооружений (башни маяков, опоры мостовых ферм) приходится вводить в расчёт и собственный вес конструкции.

В таких случаях возникает вопрос о целесообразной форме стержня. Если мы подберём сечение стержня (фиг. 60) по формуле (6.4) и дадим одну и ту же площадь поперечного сечения по всей длине, то материал стержня будет плохо использован; нормальное напряжение в нём дойдёт до допускаемого лишь в одном верхнем сечении; во всех прочих сечениях мы будем иметь *запас* в напряжениях, т. е. излишний материал. Поэтому желательно так запроектировать размеры стержня, чтобы во всех его поперечных сечениях (перпендикулярных к оси) нормальные напряжения были постоянны.

Такой стержень называется стержнем *равного сопротивления* растяжению или сжатию. Если при этом напряжения равны допускаемым, то такой стержень будет иметь наименьший вес.

Возьмём длинный стержень, подвергнутый сжатию силой  $P$  и собственным весом (фиг. 61). Чем ближе к основанию стержня мы будем брать сечение, тем больше будет сила, вызывающая напряжения в этом сечении, тем большими придётся брать размеры площади сечения. Стержень получит форму, расширяющуюся книзу. Площадь сечения  $F$  будет изменяться по высоте в зависимости от  $x$ , т. е.  $F = f(x)$ .



Фиг. 61.

Установим этот закон изменения площади в зависимости от расстояния сечения  $x$  от верха стержня.

Площадь верхнего сечения стержня  $F_0$  определяется из условия прочности:

$$\frac{P}{F_0} = [\sigma] \quad \text{и} \quad F_0 = \frac{P}{[\sigma]},$$

где  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение на сжатие; напряжения во всех прочих сечениях стержня также должны равняться величине

$$\sigma = [\sigma] = \frac{P}{F_0}.$$

Чтобы выяснить закон изменения площадей по высоте стержня, возьмём два смежных бесконечно близких сечения на расстоянии  $x$  от верха стержня; расстояние между сечениями  $dx$ ; площадь верхнего назовём  $F(x)$ , площадь же смежного  $F(x) + dF(x)$ .

Приращение площади  $dF(x)$  при переходе от одного сечения к другому должно воспринять вес  $\gamma F(x) dx$  элемента стержня между сечениями. Так как на площади  $dF(x)$  он должен вызвать напряжение, равное допускаемому  $[\sigma]$ , то  $dF(x)$  определится из условия

$$\frac{\gamma F(x) dx}{dF(x)} = [\sigma]. \quad (6.5)$$

Отсюда

$$\frac{dF(x)}{F(x)} = \frac{\gamma}{[\sigma]} dx.$$

После интегрирования получаем

$$\ln F(x) + C = \frac{\gamma}{[\sigma]} x. \quad (6.6)$$

При  $x = 0$  площадь  $F(x) = F_0$ ; подставляя эти значения в (6.6), имеем:

$$\ln F_0 + C = 0 \quad \text{и} \quad C = -\ln F_0.$$

Отсюда

$$\frac{\gamma}{[\sigma]} x = \ln F(x) - \ln F_0 = \ln \frac{F(x)}{F_0}, \quad \frac{F(x)}{F_0} = e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} x}$$

и

$$F(x) = F_0 e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} x}. \quad (6.7)$$

Если менять сечения точно по этому закону, то боковые грани стержня получат криволинейное очертание (фиг. 61), что усложняет и удорожает работу. Поэтому обычно такому сооружению придают лишь приближённую форму стержня равного сопротивления, например в виде усечённой пирамиды с плоскими гранями.

Приведённый расчёт является приближённым. Мы предполагали, что по всему сечению стержня равного сопротивления передаются только нормальные напряжения; на самом деле у краёв сечения напряжения будут направлены по касательной к боковой поверхности.

В случае длинных канатов или растянутых штанг форму стержня равного сопротивления осуществляют тоже приближённо, разделяя стержень по длине на ряд участков; на протяжении каждого участка сечение остаётся постоянным (фиг. 62) — получается так называемый ступенчатый стержень.

Определение площадей  $F_1, F_2, \dots$  при выбранных длинах производится следующим образом. Площадь поперечного сечения первого снизу участка будет по формуле (6.4) равна

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l_1}.$$

Чтобы получить площадь поперечного сечения второго участка, надо нагрузить его внешней силой  $P$  и весом первого участка  $\gamma F_1 l_1$ :

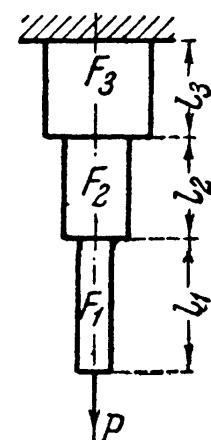
$$F_2 = \frac{P + \gamma F_1 l_1}{[\sigma] - \gamma l_2}.$$

Для третьего участка к внешней силе добавляются веса первого и второго участков. Подобным же образом поступают и для других участков.

Для того чтобы сравнить выгодность применения брусьев равного сопротивления, ступенчатых и постоянного сечения, рассмотрим числовой пример.

**Пример 15.** Опора высотой  $h = 42 \text{ м}$  подвергается сжатию центрально приложенной силой  $P = 400 \text{ т}$ ; принимая объёмный вес кладки  $2,2 \text{ т/м}^3$ , а допускаемое напряжение на сжатие  $12 \text{ кг/см}^2$ , сравнить объёмы кладки для случаев:

- опоры постоянного сечения,
- опоры из трёх призматических частей равной длины,
- опоры равного сопротивления сжатию.



Фиг. 62.

Расчет ведем в тоннах и метрах.

Для первого случая площадь поперечного сечения равна

$$F = \frac{P}{[\sigma] - h\gamma} = \frac{400}{120 - 42 \cdot 2,2} = 14,5 \text{ м}^2.$$

Объем равен

$$V = Fh = 14,5 \cdot 42 \approx 610 \text{ м}^3.$$

Во втором случае площадь сечения верхней части равна

$$F_1 = \frac{P}{[\sigma] - \frac{h}{3}\gamma} = \frac{400}{120 - 14 \cdot 2,2} = 4,48 \text{ м}^2.$$

Площадь сечения второго участка равна

$$F_2 = \frac{P + \gamma F_1 \frac{h}{3}}{[\sigma] - \frac{h}{3}\gamma} = \frac{400 + 2,2 \cdot 4,48 \cdot 14}{120 - 14 \cdot 2,2} = 6,04 \text{ м}^2.$$

Площадь сечения на третьем участке равна

$$F_3 = \frac{P + \gamma F_1 \frac{h}{3} + \gamma F_2 \frac{h}{3}}{[\sigma] - \frac{h}{3}\gamma} = \frac{400 + 2,2 \cdot 4,48 \cdot 14 + 2,2 \cdot 6,04 \cdot 14}{120 - 14 \cdot 2,2} = 8,12 \text{ м}^3.$$

Полный объем кладки равен

$$V = (F_1 + F_2 + F_3) \frac{h}{3} = (4,48 + 6,04 + 8,12) 14 = 261 \text{ м}^3.$$

Этот же ответ можно получить из условия, что усилие внизу третьего участка, равное  $P + G$  (где  $G$  — вес всей опоры), одновременно равно  $[\sigma] F_3$ ; тогда

$$V = \frac{G}{\gamma} = \frac{[\sigma] F_3 - P}{\gamma} = 261 \text{ м}^3.$$

Для опоры равного сопротивления сжатию площадь верхнего сечения равна

$$F_0 = \frac{P}{[\sigma]} = \frac{400}{120} = 3,33 \text{ м}^2.$$

Площадь нижнего сечения равна

$$F_h = F_0 e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} h} = 3,33 e^{\frac{2,2 \cdot 42}{120}} = 3,33 e^{0,77} = 7,15 \text{ м}^2.$$

Вес опоры равного сопротивления  $G$  определится из условия

$$P + G = [\sigma] F_h;$$

отсюда

$$G = [\sigma] F_h - P = 120 \cdot 7,15 - 400 = 460 \text{ т.}$$

Объем опоры равен

$$V = \frac{G}{\gamma} = \frac{460}{2,2} = 209 \text{ м}^3,$$

что меньше объема ступенчатой опоры на 20% и примерно втрое меньше опоры постоянного сечения.

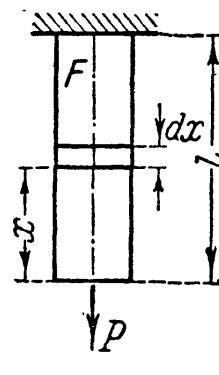
### § 30. Деформации при действии собственного веса.

При определении влияния собственного веса на деформацию при растяжении и сжатии стержней придётся учесть, что относительное удлинение различных участков стержня будет переменным, как и напряжение  $\sigma(x)$ . Для вычисления полного удлинения стержня постоянного сечения определим сначала удлинение бесконечно малого участка стержня длиной  $dx$ , находящегося на расстоянии  $x$  от конца стержня (фиг. 63). Абсолютное удлинение этого участка (формула (2.5)) равно

$$\Delta dx = \frac{(P + \gamma x F) dx}{EF} = \frac{dx}{E} \left[ \frac{P}{F} + \gamma x \right].$$

Полное удлинение стержня  $\Delta l$  равно

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \int_0^l \frac{dx}{E} \left[ \frac{P}{F} + \gamma x \right] = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}.$$



Фиг. 63.

Помножим и разделим второе слагаемое на  $F$  и учтём, что  $\gamma F l = Q$  есть полный вес стержня. Тогда удлинение от одного собственного веса (второе слагаемое формулы) равно

$$\Delta l_{\text{с. в.}} = \frac{Ql}{2EF},$$

т. е. оно в два раза меньше удлинения от приложенной к концу стержня внешней силы  $Q$ , равной собственному его весу.

Что же касается деформаций стержней равного сопротивления, то, так как нормальные напряжения во всех сечениях одинаковы и равны допускаемым  $[\sigma]$ , относительное удлинение по всей длине стержня одинаково и равно

$$\epsilon = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Абсолютное же удлинение при длине стержня  $l$  равно

$$\Delta l = \epsilon l = \frac{[\sigma] l}{E} = \frac{Pl}{EF_0},$$

где обозначения соответствуют фиг. 61.

Деформацию ступенчатых стержней следует определять по частям, выполняя подсчёты по отдельным призматическим участкам. При определении деформации каждого участка учитывается не только его собственный вес, но и вес тех участков, которые влияют на его деформацию, добавляясь к внешней силе. Полная деформация получится суммированием деформаций отдельных участков.

Пример 16. Трос шахтного подъёмника длиной 120 м имеет два участка по 60 м каждый. Площадь поперечного сечения верхнего участка равна 4 см<sup>2</sup>, нижнего — 3 см<sup>2</sup>. Объёмный вес материала троса 7,85 г/см<sup>3</sup>, его модуль упругости  $E = 1,5 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>. Вес клети, поднимаемой тросом, равен 1500 кг. Определить удлинение троса.

Вес нижней части троса составит:

$$Q_1 = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 60 \cdot 10^3 = 141,3 \text{ кг},$$

и вес верхней части

$$Q_2 = 7,85 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 60 \cdot 10^3 = 188,4 \text{ кг.}$$

Удлинение нижней части троса будет равно

$$\Delta l_1 = \frac{\left(P + \frac{Q_1}{2}\right)l}{EF_1} = \frac{\left(1500 + \frac{141,3}{2}\right)60 \cdot 10^3}{1,5 \cdot 10^6 \cdot 3} = 2,10 \text{ см},$$

а удлинение верхней части

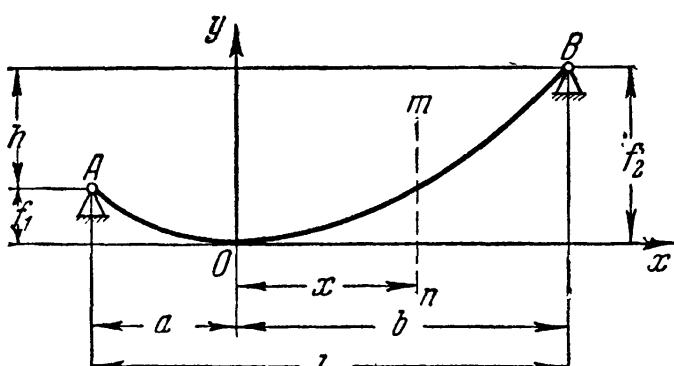
$$\Delta l_2 = \frac{\left[\left(P + Q_1\right) + \frac{Q_2}{2}\right]l}{EF_2} = \frac{\left(1500 + 141,3 + \frac{188,4}{2}\right)60 \cdot 10^3}{1,5 \cdot 10^6 \cdot 4} = 1,74 \text{ см.}$$

Полное удлинение троса будет равно

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 2,10 + 1,74 = 3,84 \text{ см.}$$

### § 31. Гибкие нити.

А. В технике встречается ещё один вид растянутых элементов, при определении прочности которых важное значение имеет собственный вес. Это — так называемые гибкие нити. Таким термином обозначаются гибкие элементы в линиях электропередач, в канатных дорогах, в висячих мостах и других сооружениях.



Фиг. 64.

Пусть (фиг. 64) имеется гибкая нить постоянного сечения, нагруженная собственным весом и подвешенная в двух точках, находящихся на разных уровнях. Под действием собственного веса нить провисает по некоторой кривой  $AOB$ .

Горизонтальная проекция расстояния между опорами (точками её закрепления), обозначаемая  $l$ , носит название *пролёта*.

Нить имеет постоянное сечение, следовательно, вес её распределён равномерно по её длине. Обычно провисание нити невелико по сравнению с её пролётом, и длина кривой  $AOB$  мало отличается (не более чем на 10%) от длины хорды  $AB$ . В этом случае с достаточной степенью точности можно считать, что вес нити равно-