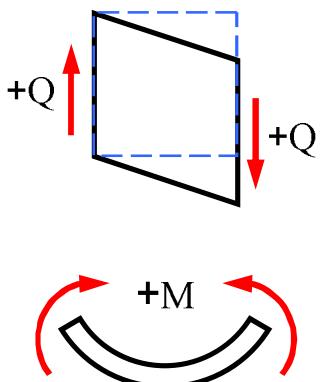


7.1. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Из шести внутренних усилий, действующих в сечении в общем случае, при плоском поперечном изгибе только два не равны нулю: Q_y и M_z (индексы часто опускают).



Правила знаков устанавливают не по направлению действию сил, как в теоретической механике, а по виду деформации.

Поперечная сила Q в сечении положительна, если ее векторы стремятся вращать части рассеченной балки по ходу часовой стрелки (положительная поперечная сила вызывает положительное касательное напряжение).

Изгибающий момент M в сечении положителен, если он вызывает сжатие в верхней части бруса, а растянутая область изгибаемого элемента – в нижней.

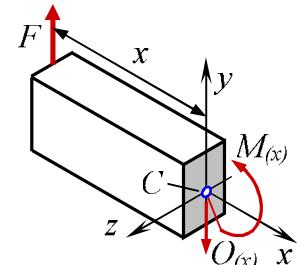
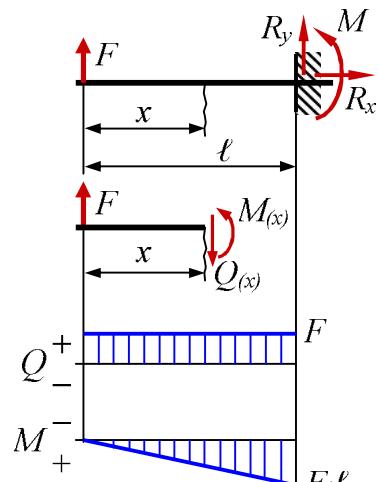
Часто эпюры изгибающего момента строят со стороны сжатой зоны элемента, но удобнее – со стороны растянутой.

Пример 7.1. Определить внутренние усилия в поперечном сечении консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой.

Решение. Опора (защемление) накладывает три связи, обусловливающие возникновение трех реакций: вертикальную и горизонтальную составляющие реакции R_x и R_y , а также опорный момент M . В целях упрощения расчета внутренние усилия определяем со свободного конца. Используем метод сечений:

Рассекаем балку на две части;
Отбрасываем одну из частей;

Заменяем действие отброшенной части внутренними усилиями (положительными в соответствии с установленными правилами знаков), составляем **Уравнения равновесия**, из которых находим внутренние усилия. Система координат помещена в центр тяжести C рассматриваемого сечения.



I участок: $0 \leq x \leq \ell$.

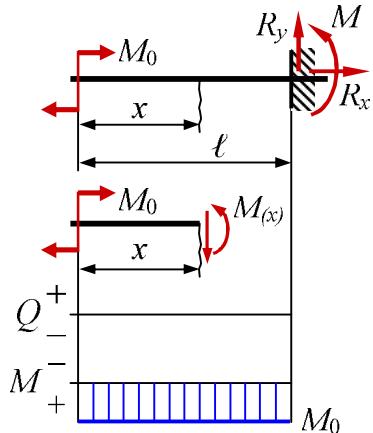
$$\sum Y = 0; \quad F - Q(x) = 0; \Rightarrow Q(x) = F;$$

$$\sum M_z = 0; \quad -F \cdot x + M(x) = 0; \Rightarrow M(x) = F \cdot x.$$

Поперечная сила $Q(x)$ – функция от абсциссы x – величина постоянная.

Изгибающий момент $M_{(x)}$ – линейная функция от абсциссы x , описывается уравнением прямой; для ее построения находим значение функции в двух точках – в начале и конце участка:

$$M_{x=0} = 0; \quad M_{x=\ell} = F \cdot \ell. \quad \text{Строим эпюры } Q \text{ и } M.$$



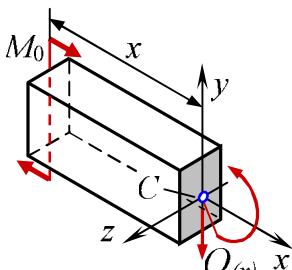
Пример 7.2. Определить внутренние усилия в поперечном сечении консольной балки, нагруженной сосредоточенным моментом.

Решение. Внутренние усилия в произвольном сечении I участка: $0 \leq x \leq \ell$.

$$\sum Y = 0; \quad Q(x) = 0;$$

$$\sum M_z = 0; \quad -M_0 + M_{(x)} = 0,$$

$$\text{откуда } M_{(x)} = M_0.$$



Поперечная сила $Q_{(x)}$ отсутствует, изгибающий момент $M_{(x)}$ – величина постоянная; имеет место чистый изгиб

Строим эпюры Q и M .

Общий подход к определению внутренних усилий при изгибе

В балке бесконечной протяженности выберем начало координат на левом конце. Внутренние усилия находим методом сечений

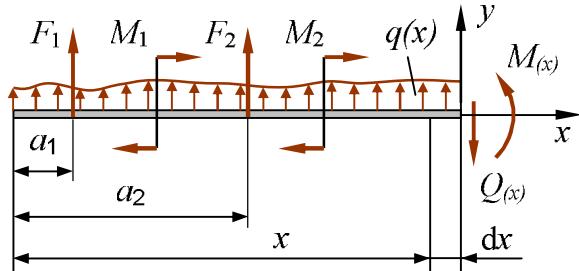


Рис. 7.2. Схема к определению внутренних усилий

$$\sum Y = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_i + \int_0^x q(x)dx - Q(x) = 0;$$

$$\text{откуда: } Q(x) = \sum_{i=1}^n F_i + \int_0^x q(x)dx.$$

Поперечная сила в произвольном сечении равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения x .

$$\sum M_z = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n F_i(x - a_i) + C_q \int_0^x q(x)dx - M_{(x)} = 0;$$

$$\text{откуда } M_{(x)} = \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n F_i(x - a_i) + C_q \int_0^x q(x)dx.$$

Здесь C_q – множитель, имеющий смысл координаты центра тяжести распределенной нагрузки.

Изгибающий момент в произвольном сечении равен алгебраической сумме моментов от всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения x , взятых относительно центра тяжести рассматриваемого сечения.

7.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

В балке, находящейся под действием плоской системы сил, двумя поперечными сечениями выделим элемент протяженностью dx (см. рис. 7.2), к которому не приложены сосредоточенные силы и моменты. Поскольку вся балка находится в равновесии, то в равновесии находится и элемент dx .

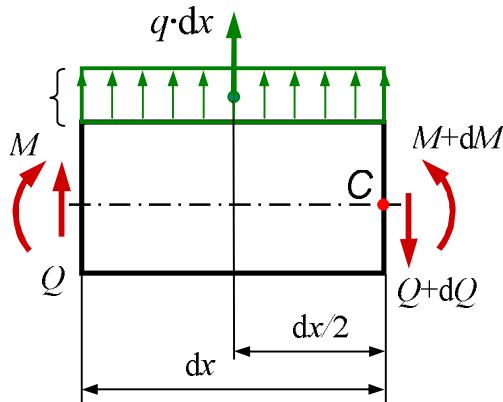


Рис. 7.3. Элемент балки с внутренними усилиями и внешней нагрузкой

поперечными сечениями выделим элемент протяженностью dx (см. рис. 7.2), к которому не приложены сосредоточенные силы и моменты. Поскольку вся балка находится в равновесии, то в равновесии находится и элемент dx .

$$\sum Y = 0; \quad Q - (Q + dQ) + q \cdot dx = 0; \\ -dQ + q \cdot dx = 0.$$

откуда $\frac{dQ}{dx} = q$. (7.1)

Первая производная от поперечной силы по абсциссе x равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной оси балки.

$$\sum M_C = 0; \quad -M + (M + dM) - Q \cdot dx - q \cdot dx \cdot \underbrace{\frac{dx}{2}}_{\rightarrow 0} = 0;$$

$$dM - Q \cdot dx = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{dM}{dx} = Q. \quad (7.2)$$

Первая производная от изгибающего момента по абсциссе x равна поперечной силе.

С учетом формул (7.1) и (7.2) получаем дифференциальные зависимости Д. И. Журавского

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q(x). \quad (7.3)$$

Полученные зависимости действительны в правой системе координат, то есть когда x возрастает от левого конца балки к правому. В левой системе координат знаки перед Q и q обратные.

7.3. ПРАВИЛА ПРОВЕРКИ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР Q И M

Напомним, геометрический смысл первой производной некоторой функции – тангенс угла наклона касательной к кривой, отображающей эту функцию, и положительным направлением оси абсцисс. На основании

дифференциальных зависимостей (7.3) при изгибе установлены следующие правила.

1. На участках, свободных от распределенной нагрузки, эпюра Q ограничена прямыми линиями, параллельными базовой (поперечная сила постоянна), а эпюра M – наклонными (изгибающий момент изменяется по линейному закону).
2. На участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра Q – наклонная прямая, а эпюра M – парабола выпуклостью в направлении действия нагрузки q .
3. В тех сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы:
 - а) на эпюре Q будут скачки на величину и в направлении приложенных сил;
 - б) на эпюре M будут изломы, причем острие излома направлено по действию силы.
4. В сечении балки, где приложен сосредоточенный момент, эпюра M имеет скачок на величину этого момента. На эпюре Q действие пары сил не отражается.
5. На участках, где $Q > 0$, момент M возрастает, то есть положительные ординаты увеличиваются, отрицательные – уменьшаются. На участках, где поперечная сила Q отрицательна, момент M убывает.
6. В том сечении, где эпюра Q , изменяясь, пересекает базисную линию (поперечная сила $Q = 0$), изгибающий момент достигает экстремума (максимума или минимума). Касательная к линии, ограничивающей эпюру M в этом сечении, параллельна оси эпюры.
7. На концевой шарнирной опоре поперечная сила равна реакции этой опоры, а изгибающий момент равен нулю, если в опорном сечении не приложена пара сил.
8. В защемленном конце балки (заделке) значения Q и M равны опорной реакции и опорному моменту.

7.4. НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

Рассмотрим простейший случай изгиба – чистый изгиб, при котором в поперечных сечениях бруса действует только *одно внутреннее усилие – изгибающий момент*. Например, в условиях чистого изгиба работают участки балки, на которых изгибающий момент постоянен, а поперечная сила отсутствует ($dM/dx = 0$).

При расчете балки на изгиб будем считать справедливыми принятые ранее гипотезы, из которых выделим следующие:

- гипотеза плоских сечений (Бернулли): поперечные сечения бруса плоские до деформации, остаются плоскими и в деформированном состоянии;
- гипотеза постоянства напряжений по ширине бруса;
- гипотеза отсутствия боковых давлений: боковые волокна бруса не давят друг на друга.

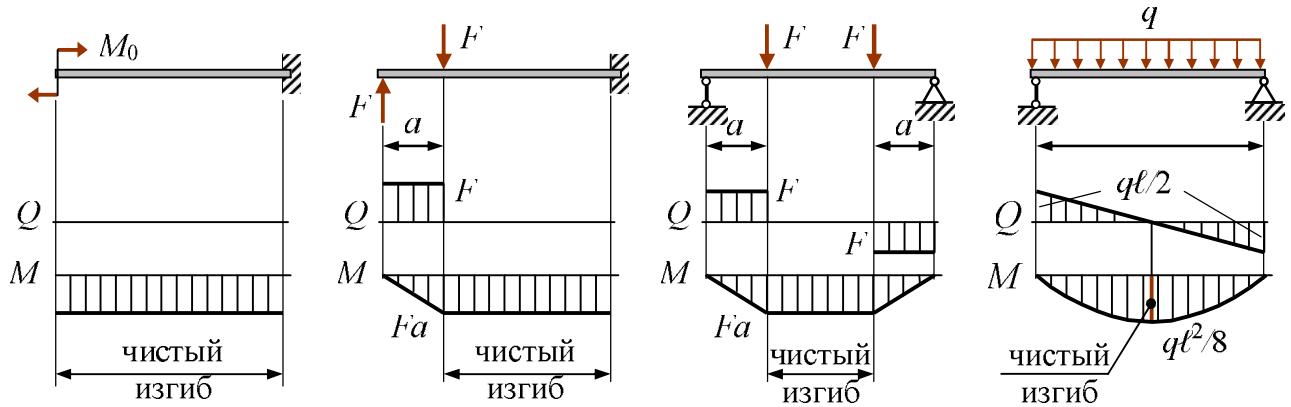


Рис. 7.4. Схемы нагружения, при которых в сечениях возникает чистый изгиб

Геометрический анализ

Двумя сечениями ad и bc на расстоянии dx выделим малый элемент (рис. 7.5, a , b) и рассмотрим его деформацию (рис. 7.5, c). Длина отрезка нейтрального слоя $dx = \rho \cdot d\phi$. Волокно нейтрального слоя не деформируется $\varepsilon = 0$, $\sigma = 0$. Любое другое волокно, находящееся на расстоянии y изменит свою длину и станет равным $(\rho + y)d\phi$. Его относительное удлинение

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{(\rho + y)d\phi - \rho \cdot d\phi}{\rho \cdot d\phi}.$$

После преобразования получим $\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}$. (7.4)

Деформация волокон пропорциональна их расстоянию до нейтрального слоя.

Физический анализ

В общем случае нагружения продольная деформация по закону Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)],$$

однако в силу гипотезы отсутствия боковых давлений $\sigma_z = 0$ и $\sigma_y = 0$, то есть волокна бруса испытывают только деформацию растяжения. Имеет место **линейное напряженное состояние**

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} (7.5)$$

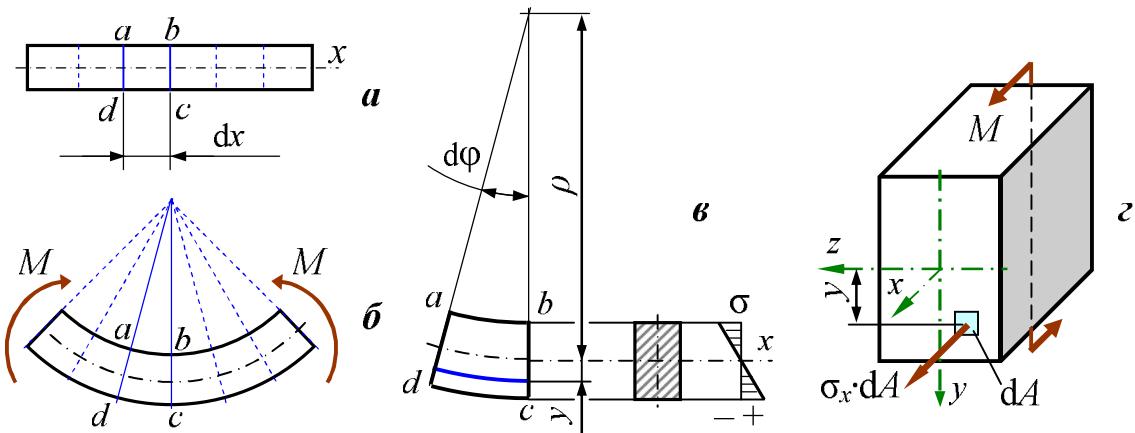


Рис. 7.5. Схемы к определению связи внутренних усилий с напряжениями:
а – брус до деформации; б – брус в деформированном состоянии; в – элемент $ab\ cd$ в деформированном состоянии; г – внутренние усилия в сечении

Статический анализ (рис. 7.5, г)

$\sigma_x \cdot dA$ – элементарное усилие; $y(\sigma_x \cdot dA)$ – элементарный момент.

Момент во всем сечении

$$M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA. \quad (7.6)$$

Синтез установленных зависимостей

Приравниваем правые части уравнений (7.4) и (7.5):

$$\frac{y}{\rho} = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \text{откуда} \quad \sigma_x = \frac{E}{\rho} y. \quad (7.7)$$

Зависимость (7.7) подставляем в (7.6)

$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z,$$

где $I_z = \int_A y^2 dA$ – момент инерции, геометрическая характеристика поперечного сечения

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M_z}{I_z} \quad (7.8)$$

и подставим его в (7.7). Опуская индекс при σ , получим уравнение А. Навье (1826)

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} y. \quad (7.9)$$

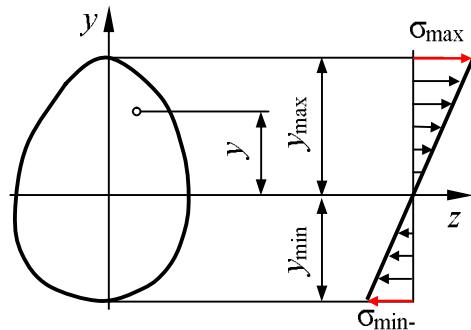
Следствия из формулы Навье

- Центр тяжести сечения является началом координат для анализа напряжений и приведения внешних сил.

- Напряжения изгиба зависят от значений изгибающего момента, момента инерции сечения и координаты точки.

- Напряжения в любой точке, лежащей на одинаковом расстоянии от нейтральной линии, равны между собой.

- Наибольшие по величине напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтрального слоя.



Условие равновесия

Из статического анализа (рис. 7.5, ε) следует:

$$\sum x = 0; \quad N = \int_A \sigma_x dA = 0.$$

В полученное равенство подставляем (7.7): $\sigma_x = \frac{E}{\rho} y$.

Тогда

$$\int_A \frac{E}{\rho} y \cdot dA = \frac{E}{\rho} S_z = 0,$$

где $S_z = \int_A y \cdot dA$ – статический момент площади, геометрическая характеристика. Поскольку отношение $\frac{E}{\rho} \neq 0$, то $S_z = 0$, следовательно,

нейтральный слой проходит через центр тяжести сечения. Радиус кривизны нейтрального слоя является и радиусом кривизны изогнутой оси бруса.
Деформация балки при изгибе – кривизна ее геометрической оси.

Из (7.8) $\frac{E}{\rho} = \frac{M_z}{I_z}$ следует

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{E \cdot I_z}. \quad (7.10)$$

Это закон Гука при изгибе.

Следствия из закона Гука

- Момент инерции характеризует способность бруса сопротивляться искривлению в зависимости от размеров и формы его поперечного сечения. Чем больше значение I_z при заданной величине M , тем большим окажется

радиус кривизны нейтрального слоя бруса, то есть брус искривляется меньше.

- Модуль упругости характеризует способность бруса сопротивляться искривлению в зависимости от его материала.

Произведение $E \cdot I_z$ называют **жесткостью сечения при изгибе**.

7.5. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ ПО НОРМАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ

Максимальные напряжения в опасном (где действует M_{\max}) сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_z} y_{\max}.$$

Принимая отношение $\frac{I_z}{y_{\max}} = W_z$, получим условие прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (7.11)$$

где W_z – осевой момент сопротивления сечения.

Для прямоугольника $W_z = \frac{b \cdot h^2}{6}$.

Для круга $W_z = \frac{\pi}{32} D^3 \approx 0,1 D^3$.

Для кольца $W_z = \frac{\pi}{32} D^3 (1 - c^4) \approx 0,1 D^3 (1 - c^4)$, где $c = d/D$ – коэффициент пустотелости. Здесь d – внутренний диаметр полого сечения.

Используя условие прочности (7.11) выполняют три вида расчетов.

▪ **Проверочный.** Вычисляют σ_{\max} , а затем вычисляют перегрузку или недогрузку в процентах по отношению к допускаемому напряжению, либо находят коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести для пластичных материалов или пределу прочности для хрупких.

▪ **Проектный.** Из условия прочности (7.11) находят необходимое значение момента сопротивления. Размеры нестандартных сечений (круг, прямоугольник...) округляют в соответствие с ГОСТом. Стандартные прокатные профили выбирают из таблиц сортамента. Если размер сечения выбран меньше требуемого, то выполняют проверочный расчет. Перегрузка более 5 % не допускается.

▪ **Определение допускаемой нагрузки.** При известных характеристиках прочности материала и заданном размере поперечного сечения определяют допускаемое *внутреннее усилие* (изгибающий момент), а затем, исходя из схемы нагружения, находят допускаемые *внешние силовые факторы*.

Если сечение несимметрично относительно оси z (трапецидальное, треугольное, тавровое...), а также при использовании хрупкого материала (чугун, керамика...), условие прочности проверяют отдельно по максимальным и минимальным напряжениям используя формулу (7.9).

7.6. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

От поперечной силы Q_y в поперечном сечении возникают касательные напряжения τ_y . Для их определения приняты следующие гипотезы.

- Касательные напряжения τ_y параллельны поперечной силе Q_y и соответственно оси Oy .
- Касательные напряжения равномерно распределены по ширине поперечного сечения на любом уровне их определения, задаваемом ординатой y .
- Для определения нормальных напряжений используют выражения, выведенные для случая чистого изгиба.

Д. И. Журавским предложена формула

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S'_z}{b \cdot I_z}, \quad (7.12)$$

где Q_y – поперечная сила в рассматриваемом сечении;

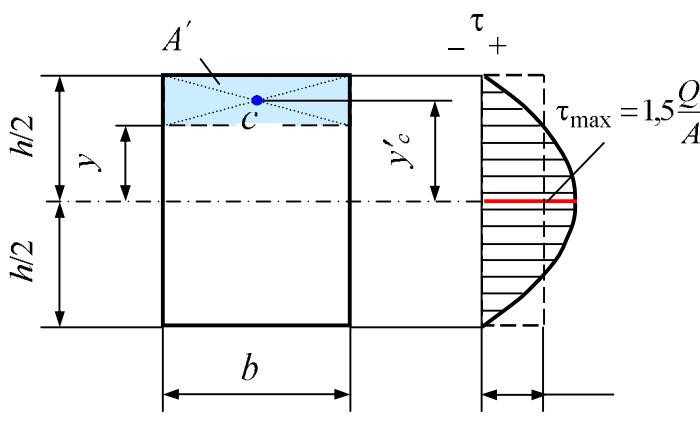
S'_z – статический момент площади отсеченной части сечения относительно центральной оси;

b – ширина сечения на уровне исследуемой точки;

I_z – момент инерции сечения относительно центральной оси.

Знак касательных напряжений τ_y определяется знаком поперечной силы Q_y .

Пример 7.3. Построить эпюру τ для прямоугольного сечения.



Момент инерции сечения

$$I_z = \frac{bh^3}{12};$$

Статический момент площади отсеченной части сечения

$$S'_z = A' \cdot y'_c.$$

$$A' = b \left(\frac{h}{2} - y \right); \quad y'_c = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right);$$

S'_z изменяется по параболической зависимости (координата y во второй степени) и определяет характер изменения напряжения τ :

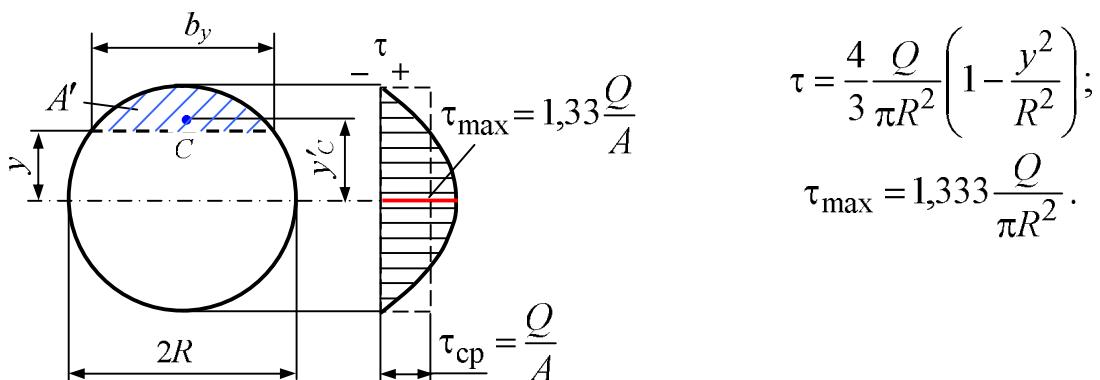
$$S'_z = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right).$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S'_z}{b \cdot I_z} = \frac{Q}{b} \frac{12}{bh^3} \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2\right) = \frac{3}{2} \frac{Q}{bh} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2\right).$$

При $y = 0$ (на нейтральной оси) $\tau = \tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}$.

При $y = h/2$ (на периферии) $\tau = 0$.

Пример 7.4. Построить эпюру τ для круглого сечения.



О влиянии касательных напряжений

Касательные напряжения переменны по высоте, вызывают искривление поперечного сечения, причем в тем большей степени, чем больше τ , то есть в центральной части сечения больше, на периферии – меньше. Следовательно, **гипотеза плоских сечений**, на которой основывался вывод формулы нормальных напряжений, **неприменима**. Однако это искривление почти не отражается на продольных деформациях волокон, что позволяет пользоваться формулой $\sigma = \frac{M_z}{I_z} y$ и при наличии поперечной силы.

Пример 7.5. Оценить соотношение нормальных и касательных напряжений при поперечном изгибе.

Для консольной балки прямоугольного сечения максимальные нормальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{F\ell}{bh^2/6} = \frac{6F\ell}{bh^2},$$

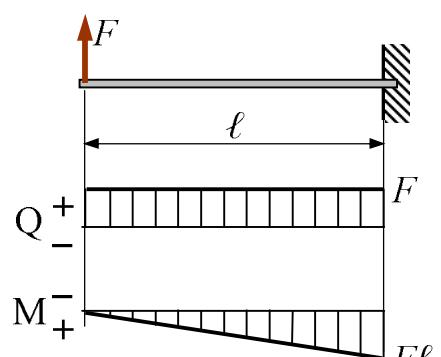
а максимальные касательные

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3F}{2bh}.$$

Сопоставив эти напряжения, получим

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{6F\ell}{bh^2} \frac{2bh}{3F} = 4 \frac{\ell}{h}.$$

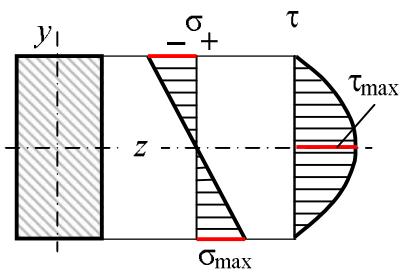
Аналогичное соотношение для круглого поперечного сечения:



$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \frac{32F\ell}{\pi d^3} \frac{3\pi d^2}{4F4} = 6 \frac{\ell}{d}.$$

Вывод: касательные напряжения в длинных ($\ell > 5h$) балках существенно меньше нормальных.

Отметим, что σ_{\max} и τ_{\max} действуют в разных точках сечения: σ_{\max} на периферии, в точках наиболее удаленных от нейтральной оси, где $\tau = 0$; τ_{\max} – в центре, на нейтральной оси, где $\sigma = 0$. Для приведенного выше примера в опасном сечении (в защемлении) эпюры распределения нормальных и касательных напряжений показаны на рисунке.



По мере укорочения длины пролета или участка балки роль момента, а, следовательно, и нормальных напряжений, снижается (в рассмотренном примере M зависит от длины, а Q – постоянна). Превалирующими в этом случае могут оказаться касательные напряжения. В сложившейся практике подбор размеров поперечного сечения выполняют по максимальным нормальным напряжениям (как при чистом изгибе), а проверку прочности проводят – по максимальным касательным. В двутавровом сечении балки опасным может оказаться точка K в сопряжении стойки с полкой, где действуют достаточно большие и нормальные, и касательные напряжения:

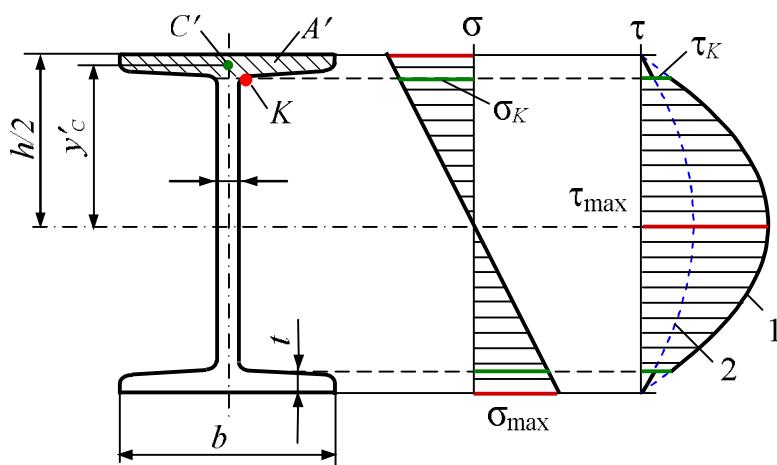


Рис. 7.6. Особенности проверки прочности балки двутаврового сечения

момент отсеченной части площади A' (на рис. 7.6 заштрихована) находят как

$$y_K = \frac{h}{2} - t; \quad S'_z = A' \cdot y'_c = b \cdot t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Эквивалентные напряжения в точке K вычисляют по теориям прочности. Линия 1 на эпюре касательных напряжений отражает закон распределения τ , рассчитанных для ширины сечения d , а линия 2 – ширины сечения b . Размеры отличаются примерно в 20 раз, чем и обусловлен скачок напряжений τ в окрестности точки K .

Здесь координату точки K и статический